BÖLÜM 13

TERS SÜZGEÇLEME (DEKONVOLUSYON)

13.1 GİRİŞ

Jeofizikte, kayıt edilen izler, birtakım evrişim işlemlerine uğrayarak orijinalliklerini yitirmişlerdir. Örneğin, kullanılan her aletin bir dürtü (impulse) tepki işlevi vardır. Öyleyse orijinal sinyal önce bu aletin tepki işlevinin evrişimine uğrayarak değişir. Daha sonra ise ize etki eden yerin tepki işlevi, işin içine girerek sinyali bir kez daha bozar. Yerin dürtü işlevi, kuşkusuz ki yerin fiziksel parametrelerine ve yapının geometrisine bağlıdır.

Buraya dek anlatılanlar kısaca özetlenirse; algılanan izler birçok etkiler nedeniyle değişikliğe uğramışlardır. Yani birçok etkenler nedeni ile farklı evrişim etkileri girmiştir. Ters süzgeçte (TS) amaç bu evrişim etkilerini gidermektir.

TS iki ana gruba ayrılır.

1. Deterministik TS.
2. İstatistiksel TS.

13.2 DETERMİNİSTİK TS

Deterministik TS in uygulanabilmesi için evrişime giren tüm terimlerin analitik veya sayısal olarak tanımlanmış olması gerekir.

Örneğin zaman ortamında algılanan bir deprem verisinin analitik denklemi yaklaşık olarak

$$s(t) = K\left[u(t)\right] * e(t) * i(t) * \phi(t) \qquad (13.1)$$

bağıntısı ile verilir. Bu bağıntıda:

s(t) : Algılanan kaynak dalgacığı.
K : Kaynağın ilerlemesi, ortamın sönüm faktörünü içeren bir katsayı.
u(t) : Kaynak-zaman işlevi (zaman içinde depreme neden olan kuvvetler).
ϕ(t) : İncelenen dalganın görünüm-yayınım işlevi (doğrudan doğruya hareketin geometrisi ile ilgilidir. Örneğin faylanma sırasında fayın hareketinin oluşturduğu dalganın bir işlevidir).
e(t) : Ortamın fiziksel özelliklerine bağlı bir işlev.
i(t) : Alet işlevi.

Deterministik ters evrişimin uygulanabilmesi için (13.1) denkleminin her bir terimi ya analitik olarak, yada sayısal olarak bilinmelidir.

(13.1) denkleminde, sismogramdaki aletin etkisinin giderilmesi istenirse denklemin FD alınarak dönüşüm işlevi bulunur.

$$S(w)= K\, U(w)\, E(w)\, I(w)\, \Phi(w) \qquad (13.2)$$

Daha sonra (13.2) denkleminde her iki taraf aletin dönüşüm işlevi olan I(w) ya bölünerek alet etkisi giderilir. Buradan TFD ile zaman ortamına geçilerek aletin etkisinin giderilmiş olduğu kayıt elde edilir. İşte bu işlem deterministik ters evrişimdir. Buraya dek, aletin dönüşüm işlevinin (veya başka herhangi bir parametre) bilindiği varsayılmaktadır. Eğer dönüşüm işlevi bilinmiyorsa, bunun saptanması için Thomson-Haskell yöntemi kullanılır.

Deterministik TS leme çok iyi bilinen ve tanımlanan sorunlarda kullanılır.

13.3 İSTATİSTİKSEL TERS SÜZGEÇLEME

İstatistiksel yöntemler (EKK, özilişki, z dönüşümleri vd.) kullanılarak yapılan ters evrişimlerdir. Genelde uygulama alanlarında çok kullanılır. Özellikle sismik yansımada geniş uygulama alanları vardır. Bunun yanı sıra potansiyel alanlarda da uygulanabilirliği üzerinde çalışmalar bulunmaktadır.

İstatistiksel TS leme üç gruba ayrılır.

1. Dalga biçimli TS.
2. Ön kestirmeli TS.
3. İğnecikleştirme TS.

13.4 TERS SÜZGEÇLEME İÇİN FARKLI YÖNTEMLER

TS de EKK ve bağlı olarak ta özilişki yöntemi verilecektir. İkinci aşamada ise soruna "z" dönüşümü yöntemi ile yaklaşılacaktır. w

Evrişim işlemi şekilsel olarak Şekil 13.1 de ve ters evrişim ise Şekil 13.2 de verilmektedir. Burada üç bilinmeyenden ikisinin bilinmesi durumunda üçüncü saptanabilir. Eğer x ve w biliniyorsa çıkış sinyali

$$y = x * w \qquad (13.3)$$

evrişim işlemi ile tanımlanır (Bkz Bölüm 5.5). (13.3) bağıntısında bilinmeyen w veya x olması durumunda, bunlar ters evrişim yöntemiyle bulunurlar. Örneğin w bulunmak isteniyorsa $\overline{w}$ ile gösterilir (Şekil 13.2).

$$x = y * \overline{w} \qquad (13.4)$$

Bu bağıntıda $\overline{w}$ ters süzgeç katsayılarıdır. Son iki denklem birlikte kullanılarak

$$x = \overline{w} * w * x \qquad (13.5)$$

yazılabilir. Herhangi bir işlemin birim dürtü ile evrişimi yine kendisini (Şekil 13.3) vereceğinden (13.5) denkleminde (13.6) yerine yazılırsa;

$$\delta * x = \overline{w} * w * x \qquad (13.6)$$
$$\delta = \overline{w} * w \qquad (13.7)$$

elde edilir (iğnecik süzgeci). Yani evrişim işleci ile onun tersi olan ters evrişim işlecinin evrişimi birim dürtüdür. (13.7) denkleminde ters evrişim işlecinin en kolay yoldan bulunması için, bu eşitliğin "z" dönüşümünün alınması yeterlidir.

13.4.1 EKK YÖNTEMİ İLE TERS SÜZGEÇ KATSAYILARININ OLUŞTURULMASI

EKK yöntemi ile hesaplanacak ters evrişim süzgeç katsayılarının uzunluğu önem taşır. Eğer çok kısa katsayı kullanılırsa yanılgı; uzun katsayı kullanılırsa veri yitimi ve işlem sayısı çok olur.

Örneğin iki terimli en küçük gecikmeli (1,a) dalgacığını iğneciğe dönüştüren 2 boylu TS katsayılarını bulalım (Şekil 13.4).

$$y = x * \overline{w} \cong \delta(t) \tag{13.8}$$

Not: w, x in tersini oluşturacak süzgeç katsayılarıdır. Bir dalgacık en küçük gecikmeli olması için $|a| < 1$ koşulunu sağlamalıdır.

---

z dönüşümleri kullanılarak (Bkz Bölüm 7.4)

$$x(z) = 1 + az$$

yazılır. x in tersi olan $\overline{w}(z)$ ise

$$\overline{w}(z) = \frac{1}{x(z)} = \frac{1}{1 + az} \tag{13.9}$$

dir. "z" dönüşümü özellikleri kullanılarak

$$\overline{w}(z) = 1 - az + a^2z^2 - .... - a^n z^n \tag{13.10}$$

elde edilir. İlk iki terim alınarak

$$\overline{w} = (\overline{w}_0, \overline{w}_1) = (1, -a) \tag{13.11}$$

bulunur. (13.11) denklemi ile bulunan TS katsayıları x=(1,a) olan giriş dalgacığını "iğne" yapmaya çalışan iki elemanlı süzgeçtir. Gerçekten de süzgeç katsayıları (13.11) denklemi ile verilen Şekil 13.4 teki süzgecin çıktısı, evrişimden yararlanılarak

$$y = (1, a) * (1, -a) = 1, 0, -a^2 \tag{13.12}$$

şeklinde yazılır. Oysa istenen gerçek çıktı iğneciktir. Dolayısı ile yanılgı

$$e = \delta - y = [1,0,0] - [1,0,-a^2] = 0, 0, a^2$$

6

dır. İki işlev arasındaki yanılgı ise

$$E = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \quad i = 1, 2, ..., n \tag{13.13a}$$

şeklinde verilir. Bu problemde ise

$$E = \sum_{i=1}^{n} (\delta_i - y_i)^2 \tag{13.13b}$$

dir. Bu denklemde:

n : Toplam eleman sayısı.
i : Sayıcı.

$$E = \left[(\delta_1 - y_1)^2 + (\delta_2 - y_2)^2 + (\delta_3 - y_3)^2\right]$$
$$E = (1-1)^2 + (0-0)^2 + (0-a^2)^2 = a^4$$
$$E = \sum_{i=1}^{n} (\delta_i - y_i)^2 = a^4 \tag{13.14}$$

bulunur. Böyle bir süzgeç düzenlemedeki yanılgımız a4 tür. Bu yanılgıyı en küçük yaparak, düzenlenen süzgeç optimuma yaklaştırılır. Bu yöntem EKK den başka bir şey değildir. Şekil 13.4 te verilen (1,a) girişinden oluşmuş bir dalgacığı "δ" işlevine çevirecek iki elemanlı dizgenin katsayıları $\overline{w}_0$ ve $\overline{w}_1$ ise, gerçek çıktı

$$y = \overline{w} * x = (\overline{w}_0, \overline{w}_1) * (1, a)$$

dır. Bu evrişim z dönüşümü alınarak veya evrişim özellikleri (Şekil 13.5) kullanılarak bulunabilir.

$$y = \overline{w}_0, (\overline{w}_1 + \overline{w}_0 a), \overline{w}_1 a \tag{13.15}$$

İstenen çıktı birim dürtüdür; öyleyse yanılgı,

$$e_i = \delta_i - y_i = [1,0,0] - [\overline{w}_0, (\overline{w}_1 + \overline{w}_0 a), \overline{w}_1 a]$$
$$e_i = [1 - \overline{w}_0], [-\overline{w}_1 - \overline{w}_0 a], [-\overline{w}_1 a] \tag{13.16}$$

dır. Yanılgı enerjisi ise (13.13) denklemlerinden,

$$E = [1 - \overline{w}_0]^2 + [-\overline{w}_1 - \overline{w}_0 a]^2 + [-\overline{w}_1 a]^2$$
$$E = 1 - 2\overline{w}_0 + \overline{w}_0^2 + \overline{w}_1^2 + 2\overline{w}_0 \overline{w}_1 a + \overline{w}_0^2 a^2 + \overline{w}_1^2 a^2$$
$$E = 1 - 2\overline{w}_0 + (1 + a^2)\overline{w}_0^2 + \overline{w}_1^2 + 2\overline{w}_0 \overline{w}_1 a + (1 + a^2)\overline{w}_1^2 \tag{13.17}$$

elde edilir. (13.13) denklemlerinden görüldüğü gibi yanılgı enerjisi tümüyle süzgeç katsayılarına bağlıdır. Kısaltma amacıyla (13.17) de a_0=(1+a^2) olarak gösterilir.

$$E = 1 - 2\overline{w}_0 + \overline{w}_0^2 a_0 + \overline{w}_1^2 + 2\overline{w}_0\overline{w}_1 a + \overline{w}_1^2 a_0$$

Yanılgı enerjisinin, parametrelere göre türevleri sıfıra eşitlenerek yanılgı enerjisi en küçük yapılır.

$$\frac{\partial E}{\partial \overline{w}_n} = 0 \qquad n = 0,1,2,......$$

$$\frac{\partial E}{\partial \overline{w}_0} = 0 \quad , \quad \frac{\partial E}{\partial \overline{w}_1} = 0 \tag{13.19}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \overline{w}_0} = 0 \rightarrow a_0\overline{w}_0 + a\overline{w}_1 = 1 \tag{13.20}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \overline{w}_1} = 0 \rightarrow a_0\overline{w}_0 + a_0\overline{w}_1 = 0 \tag{13.21}$$

Son iki denklem determinantlar kullanılarak çözülür.

$$a_0\overline{w}_0 + a\overline{w}_1 = 1$$
$$a_0\overline{w}_0 + a_0\overline{w}_1 = 0$$

Not:

$$a_1 x + b_1 y = c_1 \qquad \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

dizey normunda yazılıp determinant kullanılarak çözülürse

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} . x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} . y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad , \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

dir.

$$\overline{w}_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & a_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & a \\ a & a_0 \end{vmatrix}} = \frac{a_0}{a_0^2 - a^2}$$

$$\overline{w}_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & 1 \\ a & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & a \\ a & a_0 \end{vmatrix}} = \frac{-a}{a_0^2 - a^2}$$

$a_0 = 1 + a^2$ yerine konursa

$$\overline{w}_0 = \frac{1+a^2}{1+a^2+a^4} \quad , \quad \overline{w}_1 = -\frac{a}{1+a^2+a^4}$$

En küçük yanılgı içeren süzgeç katsayıları

$$\overline{w}_i = \left[\frac{1+a^2}{1+a^2+a^4} , -\frac{a}{1+a^2+a^4} \right] \tag{13.22}$$

olarak bulunur. Buraya dek yapılanlar Şekil 13.6 da görülmektedir.

(13.22) denkleminde daima

$$\left|\overline{w}_0\right| > \left|\overline{w}_1\right|$$

dir. Bu nedenle de w_i en küçük gecikmelidir.

Çözüm aşamasında yapılan en küçük yanılgı bulunmak istenirse, (13.22) denklemi ile verilen katsayılar (13.17) eşitliğinde yerine konmalıdır.

$$E_{min} = 1 - 2\frac{1+a^2}{1+a^2+a^4} + \left(1+a^2\right)\left(\frac{1+a^2}{1+a^2+a^4}\right) + 2\frac{1+a^2}{1+a^2+a^4} - \left(\frac{a}{1+a^2+a^4}\right)a +$$
$$\left(1+a^2\right)\left(\frac{-a}{1+a^2+a^4}\right)^2$$

$$E_{min} = \frac{a^4}{1+a^2+a^4} \tag{13.23}$$

Buraya dek, en küçük gecikmeli, bir giriş dalgacığını iğnecik halinde bir çıktıya dönüştüren TS ve optimum süzgeç katsayıları ile yanılgıları hesaplanmıştır. Bunlar toplu halde Çizelge 13.1 de sunulmaktadır.

Örnek 13.1
Şekil 13.7 de verilen dalgacığın TS çıkışını ve yanılgı enerjisini hesaplayınız.

	Süzgeç katsayıları		Yanılgı enerjisi	Sonuç
	w_0	w_1		
Ters süzgeç katsayıları	1	-a	a^4	$(1,0,-a^2)$
Optimum süzgeç katsayıları	$\frac{1+a^2}{1+a^2+a^4}$	$\frac{-a^2}{1+a^2+a^4}$	$\frac{a^4}{1+a^2+a^4}$	$\frac{1+a^2}{1+a^2+a^4}, \frac{a^3}{1+a^2+a^4}, \frac{-a^2}{1+a^2+a^4}$

$$y = x * w = \left(1, \frac{1}{2}\right) * \left(\frac{10}{11}, -\frac{4}{11}\right)$$

$$y = \frac{10}{11}, \frac{1}{11}, -\frac{2}{11}$$

Yanılgı enerjisi ise (13.13a) denkleminden bulunur.

$$E = \left(1 - \frac{10}{11}\right)^2 + \left(-\frac{10}{11}\frac{1}{2} + \frac{4}{11}\right)^2 + \left(\frac{4}{11}\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{121} = 0.04958$$

13.4.2 Özilişki yöntemi ile TS katsayılarının oluşturulması (dalga biçimi TS katsayılarının saptanması)

Bölüm 13.4.1 de verilen x=(1,a) dalgacığının özilişkisi (Bkz. Bölüm 5.6.4) (a,a^2+1,a) dır (Şekil 13.8). Yani sıfır kaymada (a^2+1), bir kaymada ise (a) dır. Eğer özilişki ϕ ile gösterilirse,

$$\phi_0 = 1 + a^2 \quad , \quad \phi_1 = a$$

dır. Öyleyse (13.17) denkleminde görülen "$1+a^2$" ve "a" terimleri doğrudan doğruya sıfır ve bir kaymadaki özilişki değerleridir.

Özilişki kullanılarak (13.20) ve (13.21) yeniden yazılır.

$$\begin{aligned} \phi_0 \overline{w}_0 + \phi_1 \overline{w}_1 &= 1 \\ \phi_1 \overline{w}_0 + \phi_0 \overline{w}_1 &= 0 \end{aligned} \qquad (13.24)$$

(13.24) ile (13.20) ve (13.21) denklem sistemlerinin çözümü aynıdır. (13.24) denklemleri dizey olarak gösterilirse;

$$\begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_1 \\ \phi_1 & \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{w}_0 \\ \overline{w}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (13.25)$$

elde edilir.

Ters evrişim işleminde süzgeç çıktısı olan gerçek sonuç ile, istenen sonuç arasında farklılık vardır. Örneğin bir sinüs izini üçgen dalga çıkışına dönüştürecek TS katsayıları oluşturulmuş olsun. TS katsayıları ile sinüs giriş izi evriştirildiğinde elde edilen gerçek çıktı istenen çıktıdan mutlaka farklıdır (Şekil 13.9).

Gerçek çıkış ile istenen çıkış arasındaki fark yanılgı enerjisini verir.

$$y_t = x_t * \overline{w}_t = \sum_{t=0}^{n-1} x_\tau \overline{w}_{t-\tau} \qquad (13.26)$$

$$E = \sum_{t=0}^{m} \left(d_t - y_t\right)^2 \qquad (13.27)$$

(13.26) denklemindeki parametreler Şekil 13.10 da verilmektedir. Yukarıda verilen iki elemanlı TS katsayıları için denklem çözümleri Bölüm 13.4.2 de ayrıntılı olarak verilmiştir. Eğer TS katsayıları uzun ise (n-1 adet) kurulacak dizeyler oldukça büyük olur. Kuşkusuz ki uzun TS katsayıları kullanıldıkça yanılgı enerjisi küçülür. Ancak hem yanılgı enerjisinin küçüklüğü, hem de TS katsayılarının ekonomik uzunluğu seçilerek optimum bir çözüm bulunmalıdır. Başka bir deyişle yanılgı enerjisi en küçük yapılacak diye çok uzun katsayılar kullanmak ideal bir işlem değildir. Uzun katsayılar için (13.25) denklemi geliştirilip genelleştirilebilir.

$$\begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \cdots\cdots\cdots \phi_{n-1} \\ \phi_1 & \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \cdots\cdots\cdots \phi_{n-2} \\ \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 \cdots\cdots\cdots \phi_{n-3} \\ \phi_3 & \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \phi_1 \cdots\cdots\cdots \phi_{n-4} \\ . & . & . & . & . \qquad\qquad . \\ . & . & . & . & . \qquad\qquad . \\ . & . & . & . & . \qquad\qquad . \\ \phi_{n-1} & \phi_{n-2} & \phi_{n-3} & \phi_{n-4} & \phi_{n-5} \cdots\cdots \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{w}_0 \\ \overline{w}_1 \\ \overline{w}_2 \\ \overline{w}_3 \\ . \\ . \\ . \\ \overline{w}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ . \\ . \\ . \\ g_{n-1} \end{bmatrix} \qquad (13.28)$$

(13.28) denklemi incelenecek olursa 3 üyeden oluştuğu görülür.

Bunlar:

1. Eşitliğin sol tarafında yer alan nxn boyutlu bir kare dizey vardır. Bu kare dizey aşırı bakışıktır ve Toeplitz dizeyi adını alır. Çeşitli gecikmelerdeki, giriş sinyalinin ("x_t") özilişkisidir.
2. Kare dizey ile eşitlik arasında kalan (nx1) boyutlu w katsayı larından oluşan kolon ise, saptanması istenen TS katsayıları dır. (13.28) denkleminin çözümünden bu süzgeç katsayıları bulunur.
3. Eşitliğin sağ tarafında ise nx1 boyutlu bir kolon dizey vardır. Bu kolon dizey istenen çıkışla, girdi verisi olan "x_t" nin çapraz ilişkisinden elde edilir.

Toeplitz dizeyinin özellikleri

nxn boyutundan oluşan Toeplitz dizeyi aşırı bakışıktır. Aşırı bakışık olması bilgisayar belleğinde az yer tutması açısından bir vantajdır. Dizeye dikkat edilirse, yanlızca ilk satırın hesaplanmasından tüm dizey kolaylıkla kurulabilir. Bu dizey aynı zamanda Wiener-Hophf tümlev denkleminin sayısal şeklidir. (13.28) denkleminin çözümü Levinson algoritması ile yapılır (Bkz Ek C).

Bu çözümde, süzgeç çıkışında istenen dalga biçimi tanımlandığı için "DALGA BİÇİMİ TERS EVRİŞİM" denir.

Not: Eşitliğin sağ tarafındaki "g" kolonundaki çapraz ilişkide kayma sıfır alınırsa iğnecik TS elde edilir.

13.4.3 Önceden kestirmeli ters evrişim

Önceden kestirmeli ters evrişim; bir zaman veya uzay dizisinin geçmişteki değerlerinden yararlanarak gelecekteki değerinin kestirilmesi işlemidir. Jeofizikte; bir ekstrapolasyon (dış değer bulma) yöntemi olarak kabul edilebilir. Gelişigüzel olaylardan kaynaklanan gelişigüzel verilerin geçmişine bakarak gelecekteki kestirimin yapılması olanaksızdır. Örneğin, kayıt edilen bir jeofizik verinin gürültü kısmı önceden kestirilemez. Çünkü gürültünün, saptanabilen belirli bir dönemi yoktur. Önceden kestirmeli ters evrişim ancak, veri içinde dönemli bir olayın sürekli olarak yer alması durumunda kullanılır. Bilindiği gibi dönemsel (periyodik) bileşenler, belirli bir süre içinde yinelenen, art arda gelen olaylardır. Sismik yöntemde katman sınırlarında bir kaç kez yansımaya uğrayıp yüzeye gelen ve sonradan yiten dalgalar örnek olarak verilebilir. Benzer olay denizde yapılan sismik çalışmalarda görülür.

Dalga, su ile karanın serbest yüzeyi arasında bir kaç kez yansıyarak kayıtçıya ulaşır (Şekil 13.11). Bunlar dönemli dalgalardır. Bu soruna Reverberasyon denir. Kayıtta sürekli ve düzenli olarak görülen bu yinelemeli yansımaların giderilmesi gerekir. Bu işlem de Dereverberasyon ismini alır.

Bir izin "t" anına kadar olan bölümünü kullanarak "α" zaman kadar sonraki değerleri (Şekil 13.12) (13.28) dizeyinden bulunur. Burada "g" değerleri giriş verisi ile istenen çıkışın çapraz ilişkisidir.

$$g_\tau = \sum_t d_t\, S_{t-\tau}$$

Bu bağıntıda "d_t" istenen çıkıştır ve $d_t = S_{t+\alpha}$ dır. O zaman yukarıdaki denklem

$$g_\tau = \sum_t S_{t+\alpha}\, S_{t-\tau} = \sum_t S_t S_{t-(\alpha+\tau)} \qquad (13.29)$$

durumuna gelir. (13.28) denklemindeki ϕ dizeyi girişin çeşitli τ kaymalarındaki özilişkisidir.

$$\tau_\tau = \sum_t S_t\, S_{t-\tau}$$

Burada "τ" kayma miktarına önceden kestirme kayması olan "α" eklenirse yani $\tau = \tau + \alpha$ olursa,

$$\phi_{\alpha+\tau} = \sum_t S_t S_{t-(\alpha+\tau)} = g_\tau \qquad (13.30)$$

t

elde edilir. (13.30) denklemi, önceden kestirmeli ters evrişimde çapraz ilişki kolonu üyelerinin "α" kadar ötelenmiş özilişki değerlerinden başka birşey olmadığını gösterir. Böylece önceden kestirmeli ters evrişim bağıntısı:

$$\begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_{n-1} \\ \phi_1 & \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_{n-2} \\ \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \phi_1 & \phi_{n-3} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \phi_{n-1} & \phi_{n-2} & \phi_{n-3} & \phi_{n-4} & \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{w}_0 \\ \overline{w}_1 \\ \overline{w}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \overline{w}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_\alpha \\ \phi_{\alpha+1} \\ \phi_{\alpha+2} \\ . \\ . \\ . \\ \phi_{\alpha+n-1} \end{bmatrix} \qquad (13.31)$$

olarak yazılabilir. (13.31) bağıntısı (13.28) e benzer şekilde Ek C de verilen algoritma yardımı ile çözülür.

(13.31) denkleminde α önkestirme kayması (gecikmesi) olarak isimlendirilir (Şekil 13.12). Önkestirme kaymasını α=1 birim için inceleyelim. O zaman (13.31) eşitliği:

$$\begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_{n-1} \\ \phi_1 & \phi_0 & \phi_1 & \phi_{n-2} \\ \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \phi_{n-3} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \phi_{n-1} & \phi_{n-2} & \phi_{n-3} & \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{w}_0 \\ \overline{w}_1 \\ \overline{w}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \overline{w}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ . \\ . \\ . \\ \phi_n \end{bmatrix} \qquad (13.32)$$

olarak yazılır. Bu bağıntıdaki eşitliğin sağ tarafındaki kolon dizey eşitliğin soluna geçirilir.

$$\begin{bmatrix} -\phi_1 \\ -\phi_2 \\ -\phi_3 \\ . \\ . \\ . \\ -\phi_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_{n-1} \\ \phi_1 & \phi_0 & \phi_1 & \phi_{n-2} \\ \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \phi_{n-3} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \phi_{n-1} & \phi_{n-2} & \phi_{n-3} & \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{w}_0 \\ \overline{w}_1 \\ \overline{w}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \overline{w}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (13.33)$$

(13.33) denkleminde soldaki dizeyin üzerine bir satır eklenip ve "-" işaret TS katsayı vektörüne aktarılarak, normalize (Bkz Ek 13A) edilir.

$$\begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_n \\ \phi_1 & \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_{n-1} \\ \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \phi_2 & \phi_{n-2} \\ . & . & . & . & \\ . & . & . & . & \\ . & . & . & . & \\ \phi_n & \phi_{n-1} & \phi_{n-2} & \phi_{n-3} & \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{w}_0 \\ \overline{w}_1 \\ \overline{w}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \overline{w}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} \tag{13.34}$$

(13.34) denkleminde "n" adet normal denklem ile "n" adet de bilinmeyen (w_0, w_1, ...w_{n-1} ve v) vardır. (13.34) te

$$v = \phi_0 - \phi_1\overline{w}_0 - \phi_2\overline{w}_1 - .... - \phi_n\overline{w}_{n-1} \tag{13.35}$$

dir. (13.34) bağıntısı α=1 birim gecikmeli bir önceden kestirmeli süzgecin, n+1 uzunluklu bir TS özdeş olduğunu gösterir. Bunun anlamı ise ayrımlılığın önceden kestirmeli ters evrişim işlemi ile
arttırılabileceğidir. Böyle bir ters evrişimde yapılacak en küçük yanılgı,

$$E_{min} = \sum_t d_t^2 - \sum_t f_t\, g_t \tag{13.36}$$

dir. "n" uzunluklu ve α=1 birim kaymaya sahip önkestirmeli süzgeç için;

$$d_t = S_{t+1} \tag{13.37a}$$
$$\sum_t d_t^2 = \phi_0 \tag{13.37b}$$
$$g_t = \phi_{t+1} \tag{13.37c}$$

denklemleri yazılabilir. Böylece

$$E_{min} = \phi_0 - \left(\phi_1\overline{w}_0 + \phi_2\overline{w}_1 + ... + \phi_n\overline{w}_{n-1}\right) \tag{13.38}$$

elde edilir. Bu eşitlik (13.35) ile aynıdır. Öyleyse yanılgı;

$$E_{min} = v \tag{13.39}$$

olarak bulunur.

13.4.4 İğnecikleştirme ters evrişimi

Bu tür ters süzgeçte çıkışın iğnecik şeklinde (birim dürtü) olması istenir (d_t=1,0,0,0...). Bu amaçla oluşturulan ters evrişim katsayıları iğnecikleştirme TS ni oluşturur. Anılan işlem iki tür yaklaşımla gerçekleştirilir.

a. Dalga biçimi yaklaşımı ile iğnecikleştirme

(13.28) denkleminde sağ taraftaki kolon dizeyin ilk elemanı sıfırdan farklı, diğer elemanları sıfır olarak yazılırsa, elde edilecek süzgeç katsayıları iğnecikleştirme işlemini yapar. Kolon dizeyin ilk elemanının sıfırdan farklı, diğer elemanlarının sıfır olması, giriş verisi ile iğneciğin (1,0,0,...0) çapraz evrişiminden kaynaklanır.

$$\begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \cdots\cdots \phi_n \\ \phi_1 & \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 \cdots\cdots \phi_{n-1} \\ \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \phi_1 \cdots\cdots \phi_{n-2} \\ . & . & . & . \quad\quad . \\ . & . & . & . \quad\quad . \\ . & . & . & . \quad\quad . \\ \phi_{n-1} & \phi_{n-2} & \phi_{n-3} & \phi_{n-4} \cdots\cdots \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{w}_0 \\ \overline{w}_1 \\ \overline{w}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \overline{w}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} \tag{13.40}$$

b. Ön kestirme yaklaşımı ile iğnecikleştirme

(13.34) denkleminin sağ tarafı iğnecik işlevine uygun yazılırsa ($\alpha=1$ kayma için) iğnecikleştirme yolu ile TS yapılır.

$$\begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \cdots\cdots \phi_n \\ \phi_1 & \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 \cdots\cdots \phi_{n-1} \\ \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \phi_1 \cdots\cdots \phi_{n-2} \\ . & . & . & . \quad\quad . \\ . & . & . & . \quad\quad . \\ . & . & . & . \quad\quad . \\ \phi_{n-1} & \phi_{n-2} & \phi_{n-3} & \phi_{n-4} \cdots\cdots \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\overline{w}_0 \\ -\overline{w}_1 \\ . \\ . \\ . \\ \overline{w}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} \tag{13.41}$$

Not: Ters evrişim ve reverberasyon yöntemleri Yılmaz (1976) ve frekans ortamında ters evrişim Baysal (1985) de ayrıntılı olarak verilmiştir.
