# BÖLÜM 12

# FREKANS ORTAMI SÜZGEÇ DÜZENLEME

## 12.1 GİRİŞ

Jeofizikte, sayısal süzgeçler büyük bir yer kapsar. Bölüm 11.8 de verilen tüm dizgeler bir karakutu işlevi gibi düşünülerek, frekans ortamında tanımlanabilir. Frekans ortamında alçak, yüksek ve bant geçişli süzgeçler tanımlanıp oluşturulabildiği gibi özellikle potansiyel alanlarda çok kullanılan yukarı ve aşağı doğru analitik uzanımlar, türev süzgeçleri de frekans ortamında oluşturulabilir.

Başka bir deyişle istenen bir frekans yanıtını veren sayısal bir dizinin spektrum ortamında hesaplanarak, bunların uzay veya zaman ortamına aktarılarak bir katsayılar dizisi (ağırlık katsayıları) elde etme işlemi, süzgeç düzenlemedir. Süzgeçler elektrik devrelerde, analog sürekli verilerin süzülmesinde kullanıldığında "analog süzgeçler", sonlu sayısal verilerin süzülmesi amaçlandığında da "sayısal süzgeçler" ismini alır.

## 12.2 SÜZGEÇLEME KURAMI

Zaman ortamı süzgeçleme bağıntısı (11.22) denklemleri ile verilmektedir (Şekil 12.1).

$$\phi'(x) = \phi(x) * f(x)$$

$$\phi'(x) = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(\tau)\phi(x-\tau)d\tau$$

Bu bağıntıda:

$\phi(x)$ : Giriş verisi.
$\phi'(x)$ : Çıkış verisi.
$f(x)$ : Süzgeç işlevi.
$\tau$ : Evrişimdeki kayma.

Süzgeç işlevi olan "f(x)" ın belirli ve sonlu sayıda eleman içermesi gerekir. Süzgeç elemanları bu sayının dışında sıfırdır.

$$|x| \geq X \text{ için } f(x) = 0$$

Öyleyse (11.22) bağıntısında bu sınırlar yazılırsa ve süzgeç işlevi de bakışık olacağından;

$$\phi'(x) = \int_{-X}^{X} f(\tau)\phi(x-\tau)d\tau \qquad (12.1)$$

(12.1) ile tanımlanan zaman (uzay) ortamındaki süzgeçleme bağıntısının FD alınarak frekans (dalgasayısı) ortamındaki süzgeçleme denklemi elde edilir.

Süzgeçlemede aşağıdaki gösterimler yapılarak;

$\Phi'(u) = \Im[\phi'(x)]$ : süzgeçlenmiş verinin spektrumu,
$F(u) = \Im[\phi'(x)]$ : süzgeç işlevinin spektrumu,
$\Phi(u) = \Im[\phi(x)]$ : giriş verilerinin spektrumu,
u : frekans ortamı bağımsız değişkeni,

$$\Phi'(u) = F(u).\Phi(u) \tag{12.2}$$

yazılabilir. (12.2) denkleminde en önemli nokta F(u) işlevinin tanımlanmasıdır. Frekans ortamı süzgeçlerde bu "F(u)" işlevi amaca uygun olarak tasarlanır. Örneğin bir alçak geçişli süzgeç düzenlenmek isteniyorsa veya analitik uzanım yapılması amaçlanıyorsa yine F(u) bu amaca uygun olarak düzenlenir.

Son bağıntıdaki F(u) işlevi aynı zamanda frekans tepki işlevi olarak ta isimlendirilir. Frekans tepki işlevi,

$$F(u) = \int_{-X}^{X} f(x)e^{-2\pi jux}\,dx \tag{12.3}$$

ile verilir. Bu denklemde f(x) ile gösterilen işlev daima düşey eksene göre bakışıktır. Bu nedenle (12.3) denklemindeki FD yerine kosinüs dönüşümü alınabilir.

$$F(u) = 2\int_{0}^{X} f(x)\cos(2\pi ux)dx \tag{12.4}$$

Frekans ortamında (12.4) ile tanımlanan "F(u)" işlevinin TFD alınarak zaman (uzay) ortamı bağıntısı "f(x)" elde edilir. Elde edilen "f(x)" işlevinin katsayıları, artık düzenlenmesi istenen amaca uygun katsayı dizeyini içerir. Bu katsayı dizeyi (11.22) denkleminde yerine koyarak veri ile evriştirildiğinde zaman (uzay) ortamı süzülmüş verisi elde edilir. Anlatılanlar zaman ortamında ayrık evrişim tümlevi olarak,

$$\phi'(x) = \sum_{k=-X/\Delta x}^{X/\Delta x} f(k\,\Delta x)\phi(x-k) \tag{12.5}$$

yazılabilir. Bu denklemde:

$\Delta x$ : x bağımsız değişkenine ait örnekleme aralığı.
k : x ekseni sayıcısı.

(12.5) denklemini basitleştirmek amacı ile örnekleme aralığı birim ve $w(k)=f(k\,\Delta x)$ olarak alınırsa,

$$\phi'(x) = \sum_{k=-X}^{X} w(k)\phi(x-k) \tag{12.6}$$

elde edilir. (12.4) denkleminde "f(x)" çift olduğundan frekans tepki işlevi:

$$F(u) = 2\sum_{k=0}^{X} w(k)\cos(2\pi ku) \qquad (12.7)$$

dır. (12.7) doğrusal dizge kuramının temel denklemidir. Bu denklem; w(k) ile gösterilen bir dizeyin (frekans ortamında saptanan süzgecin temel özelliklerini yansıtan) ters kosinüs dönüşümü alınmış şeklidir. Başka bir deyişle, ne tür bir süzgeç düzenlenmek istenirse, o süzgecin katsayıları frekans ortamında tanımlanıp ters kosinüs dönüşümü alınarak zaman (uzay) ortamındaki süzgeç katsayıları (ağırlık işlevi) saptanır [(12.9) denklemi]. Aynı sonuca (12.3) denkleminin TFD alınarak ta ulaşılabilir.

$$f(x) = \int_{-u_c}^{u_c} F(u)e^{2\pi jux}\,du \qquad (12.8)$$

Bu denklemdeki "$u_c$", u eksenine ait kesme frekansıdır. Potansiyel alanlarda en büyük kesme frekansı, Nyquist frekansıdır. Bu nedenle 0.5 devir/veri aralığı olarak alınabilir (Fuller 1967).

(12.8) bağıntısında frekans ortamında hesaplanan işlevin TFD alınarak uzay (zaman) ortamındaki doğrusal dizge katsayıları elde edilir. TFD yerine bakışım nedeni ile kosinüs dönüşümü kullanılması daha uygundur. Bilindiği gibi ayrık olarak ters kosinüs dönüşümü:

$$w(k) = 2\sum_{l=0}^{F_{nyq}/\Delta u} F(l\Delta u)\cos(2\pi l\Delta uk) \qquad (12.9)$$

dır. Bu denklem yardımı ile uzay (zaman) ortamı doğrusal dizge katsayıları (ağırlık dizeyi) bulunur. Bu katsayı dizeyi ile veri süzgeçlendiğinde istenen amaç doğrultusunda süzülmüş veri elde edilir.

Ağırlık katsayı dizeyini oluşturan işleç sayısı tek sayıda seçilirse evre kaymasının da önüne geçilir. Ağırlık katsayı dizeyi uygun bir pencere ile pencerelenerek sınırlanmalıdır.

Yukarıda tek boyutlu olarak verilen bağıntılar iki boyutlu durumda yazılarak çift boyutlu süzgeçleme işlemi için gerekli bağıntılar geliştirilebilir. Burada, çift boyutlu denklemler kurulurken ilgili tek boyutlu denklemlere ait denklem No ları verilecektir. Böylece tek boyutlu kuram incelenirken aynı anda çift boyutlusu da incelenebilecektir. Denklemlerin altlarında herhangi bir açıklama yapılmamaktadır. Çünkü ilgili açıklamalar zaten tek boyutlu durum için yapılmıştır. İlgili iki boyutlu süzgeçleme işlemi ve parametreleri Şekil 12.2 de verilmektedir.

$$\phi'(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta)\phi(x-\alpha, y-\beta)\,d\alpha\,d\beta \qquad (12.9a)$$

$$\Phi'(u,v) = F(u,v)\,\Phi(u,v) \qquad (12.9b)$$

Bu bağıntıda:

$\alpha$ : x eksenindeki kayma.

$\beta$ : y eksenindeki kayma.

u : x eksenine karşılık gelen, frekans ortamı bağımsız değişkeni.
v : y eksenine karşılık gelen, frekans ortamı bağımsız değişkeni.

$$F(u,v)=\int_{-X}^{X}\int_{-Y}^{Y} f(x,y)\exp^{-2\pi j(ux+vy)}\,dx\,dy \qquad (12.9c)$$

$$F(u,v)=4\int_{0}^{X}\int_{0}^{Y} f(x,y)\exp^{-2\pi j(ux+vy)}\,dx\,dy \qquad (12.9d)$$

$$\phi'(x,y)=4\sum_{n=-Y/\Delta y}^{Y/\Delta y}\ \sum_{k=-X/\Delta x}^{X/\Delta x} f(k\Delta x,n\Delta y)\ \phi(x-k\Delta x,y-n\Delta y)\Delta x\,\Delta y \qquad (12.9e)$$

Bu bağıntıda:
$\Delta y$ : "y" ekseni örnekleme aralığı.
n : "y" ekseni sayıcısı.

$$\phi'(x,y)=\sum_{n=-Y}^{Y}\ \sum_{k=-X}^{X} w(k,n)\ \phi(x-k,y-n) \qquad (12.9f)$$

$$F(u,v)=4\sum_{n=0}^{Y}\ \sum_{k=0}^{X} w(k,n)\cos(2\pi nv)\cos(2\pi ku) \qquad (12.9g)$$

$$f(x,y)=\int_{-v_c}^{v_c}\int_{-u_c}^{u_c} F(u,v)\exp^{2\pi ji(ux+vy)}\,du\,dv \qquad (12.9h)$$

Bu bağıntıda:
$u_c$ : "u" eksenine ait kesme frekansı.
$v_c$ : "v" eksenine ait kesme frekansı.

$$w(k,n)=4\sum_{l=0}^{F_{nyq}/Y}\ \sum_{m=0}^{F_{nyq}/X} F(l\Delta u,m\Delta v)[\cos(2\pi l\Delta uk)].[\cos(2\pi m\Delta vn)]\Delta u\,\Delta v \qquad (12.9i)$$

Bu bağıntıda:
$\Delta u$ : "u" ekseni örnekleme aralığı.
$\Delta v$ : "v" ekseni örnekleme aralığı.

Buraya kadar anlatılanlar aşağıdaki bölümde açıklanacaktır. İlk bölümde, analitik bağıntısı bilinmeyen, tek boyutlu, alçak geçişli bir süzgeç ve tek boyutlu yukarı uzanım, ikincisinde ise analitik bağıntısı bilinen, iki boyutlu yukarı analitik uzanım süzgecinin düzenlenmesine aittir.

## 12.3 BAĞIMSIZ DEĞİŞKENLİ ALÇAK GEÇİŞLİ SÜZGEÇ DÜZENLENMESİ

Alçak geçişli bir süzgecin dönüşüm işlevi Bölüm 11.8.2 de verilmiştir (Şekil 12.3).

Frekans ortamı süzgeç düzenlenirken aşağıdaki adımlar izlenir.

**1.** Geçirilmesi ve süzülmesi istenen dalgaboyunun, zaman (uzay) ortamı örnekleme aralığı kullanılarak, kesme frekansı hesaplanır.
Örneğin; uzay ortamı örnekleme aralığı $\Delta x$=2.5 km ve 50 km den uzun dalgaboylarını geçirip, daha kısa dalga boylarının süzülmesi isteniyorsa kesme ferkansı,

$$U_c = \frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{2.5}{50} = 0.05 \quad \text{devir / veri aralığı}$$

olmalıdır.

**2.** Kesme frekansı saptanan dönüşüm işlevi frekans ortamında uygun örnekleme aralıkları ile örneklenerek (Şekil 12.4) frekans ortamı ayrık dizisi oluşturulur ( u=0.01 seçilmiştir).

F(u) = 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, ........

**Not:** Dönüşüm işlevi farklı olsaydı, örneğin yukarı analitik uzanım işlevi kullanılsaydı, yukarı analitik uzanım işlemi yapılırdı. Yukarı analitik uzanım işlevinin analitik bağıntısı bellidir (Bkz Bölüm 12.4). Bu işleç uzunluk ortamında

$$f(x,h) = \frac{h}{2\pi\left(x^2 + h^2\right)^{3/2}} \tag{12.10}$$

$$F(u,h) = e^{-2\pi hu} \tag{12.11}$$

bağıntıları ile verilir (Şekil 12.5). Genellikle uzanım işlemlerinde $u_c$=0.5 devir/veri aralığı olarak seçilir. Bunun frekans ortamı örneklenmiş işlevi Şekil 12.5 te verilmektedir. İşlev frekans ortamında bir kez belirlendikten sonra diğer adımlar, süzgeç ne olursa olsun değişmez.

**3.** 2. adımda elde edilen dönüşüm işlevi bakışık duruma sokulur (Şekil 12.6).

**4.** Elde edilen bakışık dönüşüm işlevlerinin ters kosinüs dönüşümü alınarak uzay (zaman) ortamına geçilir (Şekil 12.7).

**Not:** Dikdörtgen dalganın FD dönüşümünün sinc işlevi olduğu, yukarı uzanım ifadesinin de FD (12.10) denklemi ile verildiği unutulmamalıdır. Yukarı uzanımın bir avantajı olarak her iki ortamdaki işlevler birbirlerine benzer.

**5.** Elde edilen diziler pencerelenerek sınırlanır. Burada üçgen pencere kullanılmıştır (Şekil 12.8).

**6.** Son olarak ta katsayı dengelemesi yapılır. Bu dengeleme ise tüm alçak geçişlilerde ve yukarı uzanımda, katsayılar toplamının 1'e, yüksek geçişlilerde ise 0'a eşitlenmesi şeklindedir.

Böylece alçak geçişli süzgeç ve yukarı uzanım için ağırlık katsayı dizeyleri oluşturulmuştur. Eğer elimizde bulunan veri bu ağırlık katsayı dizeyleri ile evriştirilirse, bir alçak geçişli ile süzgeçlenmiş veya "h" birim yukarı bir düzleme analitik uzatılmış olur.

Tek boyutlu çeşitli süzgeçlere ait katsayıların bu yöntemle saptanmasına ait bir Fortran 4 programı Ek C de verilmektedir. Söz konusu programın "FRETEP" alt programı amaca uygun olarak değiştirilerek, frekans ortamında istenen işlevler tanımlanabilir. Örnek olarak "FRETEP" alt programı alçak geçişli süzgece uygun olarak tasarlanmak istenirse, bu programda kesme frekansına dek olan kısmın "1" yapılması yeterlidir (gerekli açıklamalar için programa bakınız).

## 12.4 ÇİFT BOYUTLU YUKARI(AŞAĞI) UZANIM SÜZGEÇLERİNİN DÜZENLENMESİ

Söz konusu süzgeçlerin düzenlenmesi, pratik olarak, Bölüm 12.3 te verilen tek boyutlu yukarı uzanımdaki gibidir. Ancak burada yönteme ait temel denklemler ve frekans ortamında ki çift boyutlu yukarı uzanım analitik denkleminin elde edilmesi verilecektir. Frekans ortamı analitik denklemi bilindikten sonra süzgeç Bölüm 12.3 te anlatıldığı gibi düzenlenir.

Potansiyel kuramda z=0 düzleminden "h" kadar yukarıdaki bir

düzlemde potansiyel:

```
          ì  ì
          ¶  ¶          h ÿ(Ó,ß,0)
ÿ(x,y,h) = ¦ ¦ ----------------------------- dÓ dß      (12.12)
          §  §  2Ò[(x-Ó)2 + (y-ß)2 + h2]3/2
         -ì -ì
```

(Henderson ve Zietz 1949) olarak verilir. Bu denkleme dikkat edil-

diğinde Ó ve ß kaymalarında ÿ(Ó,ß,0) gibi bu işlev (h=0 düzlemin-

deki potansiyel verileri) ile bir f(x,y,h) işlevinin (ağırlık kat-

sayı dizeyi) evrişimi olduğu görülür. Bu işlem Şekil 12.9 da ve-

verilmektedir.

(12.12) bağıntısı evrişim tümlevi olduğuna göre

ÿ(x,y,h) = ÿ(x,y,0) * f(x,y,h)                    (12.13)

olarak yazılabilir. (12.13) denkleminde f(x,y,h) işlevi yukarı

uzanım işlevidir. Sıfır kaymada (Ó=0, ß=0) ve ÿ(x,y,0) ise sıfır
11

```
               h
f(x,y,h) = ------------------               (12.14)
           2Ò(x2 + y2 + h2)
```

düzleminde ölçülmüş potansiyel verileridir. (12.14) bağıntısının

FD alınarak frekans ortamında yukarı analitik uzanımın dönüşüm işlevinin analitik bağıntısı bulunur.

```
          ì  ì
          ¶  ¶  h exp[-2Òj(ux+vy)]
F(u,v,h) =  ¦ ¦ --------------------- dx dy              (12.15)
          §  §  2Ò(x2 + y2 + h2)3/2
         -ì -ì
```

u ve v lerin tanımı  Bölüm 12.2 de yapılmıştır. Son bağıntı "u" ve

"v" eksenlerine göre bakışık  olduğundan FD deki sinüs  içeren te-

rimler ortadan kalkar.

```
           ì  ì
           ¶  ¶  h cos(2Òux) cos(2Òvy)
F(u,v,h) = 4 ¦ ¦ ----------------------- dx dy           (12.16)
           §  §   2Ò(x2 + y2 + h2)3/2
           0  0
```

Son eşitlik Erdelyi (1954) kullanılarak x'e göre çözülürse ,

```
                 ì
          2Ò1/2 h u   ¶  K1[2Òu(y2+h2)1/2]
F(u,v,h) = -----------  ¦ ------------------- dy          (12.17)
            Ô(3/2)    §     (y2 + h2)1/2
                 0
```

elde edilir. (12.17) bu kez de y ye göre çözülürse,

```
            Ò1/2
F(u,v,h) = ---------  exp{-2Òh[(u2+v2)]1/2}              (12.18)
          2Ô(3/2)
```

bulunur. Ô işlevlerinin gerekli değerleri  bulunup (12.18) denkle-
12

minde yerine konulur. Bu değerler:

Ô(3/2) = 0.8862 , Ò1/2 = 1.77245 dir.

O zaman (12.18) bağıntısı

$$F(u,v,h) = \exp\{-2\text{Ò}h[(u2+v2)]1/2\} \qquad (12.19)$$

olarak elde edilir. Bu bağıntı yukarı analitik uzanımın dönüşüm işlevidir. Üstel işlevin dikliği "h" nin değerine bağlıdır. "h" büyüdükçe (yani daha yukarı düzlemlere çıkıldıkça) işlev dikleşir. Böylece daha uzun dalgaboyları ağırlıklı olarak geçirilir. (12.19) denklemi saptandıktan sonra, bu işlev frekans ortamında sayısal hale getirilir ve Bölüm 12.3 teki yol izlenerek uzay ortamında yukarı analitik uzanım yapabilecek katsayı dizeyi oluşturulur.

Aşağı analitik uzanım yapılması için ise (12.19) denklemindeki "h" nin "-" yapılması yeterlidir. Öyleyse aşağı uzanım dönüşüm işlevinin analitik bağıntısı

$$F(u,v,-h) = \exp\{2\text{Ò}h[(u2+v2)]1/2\} \qquad (12.20)$$

dır.

Bu yöntemle, frekans ortamında ister analitik bağıntısı ile tanımlanabilen, veya sayısal olarak gösterilebilen her türlü süzgeci oluşturmak çok kolaydır. Örneğin 1,2,.......n kez türev alan süzgeçler, yüksek geçişli, bant geçişli süzgeçler, hatta diferansiyel ve tümlev alabilecek süzgeçleri düzenlemek olanaklıdır.