BÖLÜM 11

DOĞRUSAL DİZGEDE GİRİŞ-ÇIKIŞ İLİŞKİLERİ

11.1 GİRİŞ

Dizge (sistem): belirli bir düzen içinde bir bütün oluşturmak üzere bir araya getirilmiş olan ve aralarında ilişkiler bulunan elemanlar topluluğudur. Dizge sözcüğüne ait kesin bir matematiksel tanım verilemez. Ancak verilen her dizgeye ait bir matematiksel model geliştirilerek gerekli bağıntılar elde edilebilir. Örneğin Şekil 11.1 de verilen dizgenin matematiksel olarak belirlenmesi; X ve Y toplulukları arasında, dizgenin davranışı ile tam uyum sağlayan bir dönüşümün bulunmasıdır.

Giriş ve çıkış ilişkileri yönünden sistemler iki ana sınıfa ayrılabilir.
1. Doğrusal dizgeler
2. Doğrusal olmayan dizgeler

Gerçekte, doğada doğrusal sistemler oldukça azdır. Ancak doğrusal olmayan sistemler de bazı yöntemlerle doğrusal hale dönüştürülebilir (Bkz Canıtez 1984). Bu nedenle doğrusal ve zamanla değişmeyen dizgenin tanımlanması gerekir.

11.2 DOĞRUSAL VE ZAMANLA DEĞİŞMEYEN DİZGE

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty}$$

Aşağıdaki özellikleri sağlayan sistemlere doğrusal ve zamanla değişmeyen dizgeler denir.

1. Eğer bir sistem, $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ girişlerini $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ çıkışlarına dönüştürüyorsa ve a_1 ile a_2 sabit iki sayı olmak üzere, $a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$ girişini $a_1y_1(t)+a_2y_2(t)$ çıkışına dönüştürüyorsa bu dizge doğrusaldır (Bkz Bölüm 5.4 Özellik 1).
2. t_0 bir sabit olmak üzere, $x(t-t_0)$ girişini $y(t-t_0)$ çıkışına dönüştüren sistemlere de zamanla değişmeyen dizgeler denir.

11.3 DİZGE DÜRTÜ TEPKİSİ (IMPULSE) VE DÖNÜŞÜM (TRANSFER) İŞLEVİ

Sıfır durumunda olan bir h(t) dizgesinin girişine "t'" anında uygulanan dürtü işlevine [δ(t)] doğrusal dizgenin "t" anında gösterdiği tepki, doğrusal dizgenin "dürtü tepkisi" dir (Şekil 11.2) ve h(t-t') olarak gösterilir. Eğer h(t) biliniyorsa, sistemin herhangi bir x(t) girişine ait y(t) yanıtı kolayca hesaplanabilir.

Şekil 11.2 de doğrusal ve zamanla değişmeyen bir sistemin girişine uygulanan x(t) izi t örnekleme aralıklı bir tarak işlevi ile x(t) sinyalinin çarpımı şeklinde düşünülür (Şekil 11.3). Başkabir deyişle x(t); t aralıklarla örneklenmiş dürtülerin toplamıdır (örnekleme kuramına ait ayrıntılı bilgi için Bkz Bölüm 9). Öyleyse örneklenmiş izin denklemi,

$$x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(t_n)\Delta t]\delta(t-t_n) \qquad (11.1)$$

dir. Burada; y(t) tepkisi, x(t) girdisi ve h(t-t') sistemi dürtü tepkisi birlikte kullanıldığında, olay, evrişim tümlevi [(5.54a) bağıntısı] ile tanımlanır. Evrişim tümlevi;

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

ile verilir. Bu denklemde,

$$f(t) = y(t) \quad , \quad f_1(\tau) = x(t') \quad , \quad f_2(t-\tau) = h(t-t')$$

şeklinde kullanılırsa denklem,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t') h(t-t') dt' \qquad (11.2)$$

durumuna gelir. (11.2) tümlevinde dizge tek yanlıdır (Bkz Bölüm 5.6 ve 7.3.2). O zaman (11.2) denkleminin alt sınırı sıfır olur. Dizgenin tek yanlı olması durumunda,

$$y(t) = x(t) * h(t) \qquad (11.3)$$

Dizge çıkışı = Dizge girişi * Dizgenin [h(t)], dürtü tepkisi
(dizge ağırlık işlevi)

bulunur. (11.3) bağıntısı "t" ortamında bir doğrusal dizgenin giriş-çıkış ilişkilerini vermektedir. Eğer dizgede giriş olarak birim dürtü kullanılırsa

$$y(t) = \delta(t) * h(t) \qquad (11.4)$$

ve birim dürtü işlevinin özelliğinden de;

$$y(t) = h(t) \qquad (11.5)$$

elde edilir. Bunun anlamı; doğrusal dizgeye bir birim dürtü girdiğinde, çıktı olarak ağırlık işlevi (dürtü tepkisi) bulunur demektir.

İşlev zaman ortamından frekans ortamına aktarılırken genellikle FD alınır. Eğer h(t) dürtü tepki işlevinin FD alınırsa dizgenin "DÖNÜŞÜM İŞLEVİ (transfer fonksiyonu)" elde edilir.

$$H(w) = \Im[h(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-jwt} dt \qquad (11.6)$$

Bilindiği gibi,

$$h(t) \leftarrow \Im \rightarrow H(w) \qquad (11.7)$$

dir. Evrişim işlevi frekans ortamında çarpıma dönüşeceğinden

$$Y(w) = H(w) . X(w) \qquad (11.8)$$

$$H(w)=\frac{Y(w)}{X(w)} \quad , \quad H(w)=\frac{\Im[y(t)]}{\Im[x(t)]} \tag{11.9}$$

elde edilir.

11.4 DÖNÜŞÜM İŞLEVİNİN ÖZELLİKLERİ

1. H(w) genel olarak w'nın karmaşık bir işlevidir. (5.18) denklemi kullanılarak dönüşüm işlevi,

$$H(w)=|H(w)|e^{j\phi(w)} \tag{11.10}$$

bağıntısı ile tanımlanır. Bu bağıntıda doğrusal dizgeyi belirleyen iki önemli büyüklük bulunmaktadır. (11.10) bağıntısında:
$|H(w)|$ işlevi : Doğrusal dizgenin genlik yanıtı.
$\phi(w)$ işlevi : Doğrusal dizgenin evresi.
Öyleyse doğrusal dizge çıkışının genlik ve evre spektrumları;

$$Y(w)=|H(w)|.|X(w)| \tag{11.11}$$
$$\arg Y(w)=\phi(w)+\arg X(w) \tag{11.12}$$

olarak yazılabilir.

2. Dönüşüm işlevinde (5.21) denklemine benzer şekilde,

$$H(-w)=H^*(w) \tag{11.13}$$

özelliği vardır. (5.19) denklemine benzer şekilde,

$$|H(-w)|=|H(w)| \tag{11.14}$$

özelliği geçerlidir. Yani dizgenin genlik yanıtı çift bakışıktır.

$$\left.\begin{array}{l}\Im[x(t)]=X(w)\\ \Im[y(t)]=Y(w)\end{array}\right\} \text{ ise daima } \left\{\begin{array}{l}X(-w)=X^*(w)\\ Y(-w)=Y^*(w)\end{array}\right. \tag{11.15}$$

dir. (11.9) denklemini kullanarak:

$$H(w)=\frac{Y(w)}{X(w)}\rightarrow H(-w)=\frac{Y(-w)}{X(-w)}=H(w)=\frac{Y^*(w)}{X^*(w)}=H^*(w) \tag{11.16}$$

elde edilir. Yani,

$$|H(-w)|=|H^*(w)|=|H(w)|\left|e^{j\phi(w)}\right|=|H(w)| \tag{11.17}$$

dır. Dolayısı ile,

$$|H(-w)| = |H(w)| \tag{11.18}$$

dır [Bkz. (5.21b) denklemi]. Dizgenin evre kayması

$$\phi(w) = \phi(-w) \tag{11.19}$$

daima tek bakışıktır. (11.12) bağıntısından

$$\phi(w) = \arg Y(w) - \arg X(w) \tag{11.20}$$

dır. Buradan da,

$$\begin{aligned}
\phi(-w) &= \arg Y(-w) - \arg X(-w) \\
\phi(-w) &= -\arg Y(w) + \arg X(w) \\
\phi(-w) &= -[\arg Y(w) - \arg X(w)] \\
\phi(w) &= -\phi(w)
\end{aligned} \tag{11.21}$$

elde edilir [Bkz (5.21c) denklemi].

11.5 DİZGENİN DÜRTÜ TEPKİSİ (SİSTEM İMPULS CEVABI)

(11.7) den

$$h(t) = \Im^{-1}[H(w)] = \int_{-\infty}^{\infty} H(w) e^{-jwt}\, dw \tag{11.22}$$

ilişkisi ile tanımlanan h(t) işlevine doğrusal dizgenin dürtü tepkisi denir. Eğer h(t) işlevi "t" ortamında ayrık değerlere sahip ise "dizge ağırlık katsayı işlevi" adını alır.

Evrişim kuramı (11.3) ve (11.8) denklemleri kullanılarak zaman ortamında

$$\begin{aligned}
y(t) &= h(t) * x(t) = x(t) * h(t) \\
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x f_2(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau)\, d\tau
\end{aligned} \tag{11.22}$$

bağıntıları ile yazılabilir.

Doğrusal dizgenin tepki işlevi; adından da anlaşılacağı gibi en kolay şekilde bir dizgenin birim dürtü işlevine yanıtı olarak düşünülebilir (Şekil 11.4).

Örnek olarak 1. türev işlevini yapan bir dizgenin tepki işlevini bulalım. Bunun için öncelikle, dizgeye dürtü biçimli bir izin girdiği varsayılır. Karmaşık gösterimde bu iz (Canıtez 1984),

$$x(t) = 1\, e^{-jwt} \tag{11.23}$$

denklemiyle verilir. Doğrusal dizgenin (11.23) bağıntısı ile gösterilen girdiye tepkisi (yani dizgenin çıktısı) 1. türevinin alınması ile elde edilir.

$$y(t) = [x(t)]' = -jw\, e^{-jwt} \tag{11.24}$$

Diğer taraftan doğrusal dizgenin girdi ve çıktısı arasındaki ilişki ise evrişim ile bilinmektedir.

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ -jw\, e^{-jwt} &= e^{-jwt} * h(t) \end{aligned} \tag{11.25}$$

Evrişim kuramına göre (11.25) bağıntısının her iki tarafının FD alınırsa:

$$\begin{aligned} \Im\left(-jw\, e^{-jwt}\right) &= \Im\left[e^{-jwt} * h(t)\right] \\ -jw &= H(jw) \end{aligned} \tag{11.26}$$

bulunur. Dizgenin genlik spektrumu ise:

$$\begin{aligned} \left[(-jw)^2\right]^{1/2} &= \left\{[H(jw)]^2\right\}^{1/2} \\ |H(jw)| &= w \end{aligned} \tag{11.27}$$

olarak elde edilir. (11.27) bağıntısı türev işlemi yapan bir doğrusal dizgenin dönüşüm işlevini verir. Dizgenin dürtü tepkisi ise (11.26) bağıntısının TFD dür. Temelde çok basit olan bu işlemin uygulanması sırasında birçok zorluklarla karşılaşılır. Bu zorluklar aşağıda sıralanmıştır:

1. Bir dizgenin böyle gerçek izlere uygulanabilir olması için öncelikle doğrusal ve zamanla değişmeyen dizgenin tüm özelliklerini içermesi gerekir.
2. Evrişim tümlevinin bilindiği gibi sınırları ∞ dur. Bunun için evrişim tümlevinin sınırlarının ∞ olmaktan kurtarılması gerekir.
3. Dizge Dirichlet koşullarına uymalıdır. Yani dizge işlevi

$$\int_{-T/2}^{T/2} |h(t)|\, dt < \infty \tag{11.28}$$

olmalıdır. Bunun bir diğer anlamı da dizge çıktısının sonlu enerjiye sahip olmasıdır. Buna karşılık (11.27) bağıntısında, $w \rightarrow \infty$ olmaktadır. Yani frekans büyüdükçe çıktı izinin genlikleri tekdüze olarak artmakta ve enerjileri ∞'a ulaşmaktadır. Bu sakıncanın önlenmesi için dizgenin dönüşüm işlevinin bant genişliğinin sonlu olması gerekir.

Yukarıdaki örnekte 1. türev alan bir dizgenin hesaplanması verilmiştir. Jeofizikte dönüşüm işlevi amaca göre seçilerek çeşitli işlemler yaptırılacak süzgeç düzenlenebilir (örneğin 2. türev, alçak-yüksek-bant geçişli süzgeçler, analitik uzanımlar vb. (Bkz frekans ortamı süzgeç düzenlenmesi Bölüm 12). Jeofizikte 1. türev yerine çoğunlukla 2. türevler ile uğraşılır. (11.27) bağıntısı bir kez daha uygulanırsa 2. türev elde edilir. 1. türev katsayılarının ardışık olarak uygulanmasından diğer derecelerden türevler bulunur. Örneğin 1. türev katsayısı "n" kez uygulanırsa n. dereceden türev elde edilir. Ancak böyle ardışık kullanma yerine doğrudan doğruya hesaplama yolu ile 2. türev alabilecek bir süzgeç düzenlenebilir (Bkz. Bölüm 12).

11.6 SÜZGECİN TANIMLANMASI

Bir süzgeci tanımlayan iki önemli etmen vardır. Bunlar süzgecin yitim etmeni ve bozulmasıdır. Bozulma da genlik ve evre bozulması (zaman, grup gecikmesi) olarak ikiye ayrılır.

11.6.1 Yitim etmeni (loss factor) ve desibel (dB) ölçeklemesi

Şekil 11.4 te verilen süzgecin zaman ve frekans ortamındaki bağıntıları

$$y(t) = x(t) * h(t)$$
$$Y(w) = X(w).\,H(w)$$

ile bilinmektedir. Son denklemde bağımsız değişken aynı zamanda karmaşık ta olacağından, karmaşık olarak gösterilir.

$$Y(jw) = X(jw).\,H(jw) \qquad (11.29)$$

Bu denklemde:

$$X(jw) = \Im[x(t)]$$
$$Y(jw) = \Im[y(t)]$$
$$H(jw) = \Im[h(t)]$$

dır. (11.29) denkleminde H(jw), sistem (dizge) işlevidir ve aynı zamanda da karmaşıktır. Dolayısı ile sistem işlevi karmaşık olarak gösterilir [Bkz. (5.18a) denklemi].

$$H(jw) = |H(jw)|\,e^{j\phi(w)} \qquad (11.30)$$

Bilindiği gibi H(jw) genlik, $\phi(w)$ ise evre işlevidir. H(jw) ve $\phi(w)$ nın, w bağımsız değişkenine karşılık değişimi süzgeç karakteristik özelliklerinin tanınmasında kullanılır. Örneğin giriş verisinin asıl ize ait spektrumu w_1 frekansında, büyük genlikli gürültüye ait spekturumu ise herhangi bir w_2 frekansında ve genliği göreceli olarak daha küçük olarak görülecektir. İdealde Bölüm 11.8 de verildiği gibi bir alçak geçişli süzgecin genliğini w_1 e kadar 1, w_2 ve daha sonrasında ise 0 olması istenir (Bkz Şekil 11.10).

Sistem işlevi H(jw) üstel azalan biçimde yazılabilir.

$$H(jw) = e^{-\gamma(jw)} \qquad (11.31)$$
$$\gamma(jw) = G(w) + jS(w) \qquad (11.32)$$

dır. Bu bağıntıda G(w), γ(jw) nın gerçel kısmı, S(w) da sanal kısmıdır. O zaman (11.31) denklemi,

$$H(jw) = e^{-[G(w)+jS(w)]} \qquad (11.33)$$

şeklini alır. (11.33) denkleminde her iki tarafın logaritması alınırsa,

$$\ln H(jw) = -[G(w) + jS(w)]\ln e$$
$$\ln H(jw) = -[G(w) + jS(w)] \qquad (11.34)$$

bulunur. Benzer uygulama (11.30) denkleminde de yapılırsa,

$$\ln H(jw) = \ln|H(jw)| + j\phi(w) \qquad (11.35)$$

elde edilir. (11.34) ve (11.35) denklemlerinin sol yanları eşit olduğundan,

$$\ln|H(jw)| + j\phi(w) = -[G(w) + jS(w)] \qquad (11.36)$$

sonucuna ulaşılır. (11.36) denklemi; dönüşüm işlevinin logaritmalı kısmının gerçel kısmının genliğini, evre açısını da sanal kısmının oluşturduğunu gösterir.

$$G(w) = \ln|H(jw)| \qquad (11.37)$$
$$S(w) = -\phi(w) \qquad (11.38)$$

G ve S boyutsuzlaştırıldığında, G doğal logaritma S ise derece veya radyan cinsinden gösterilir. G desibele çevrildiğinde süzgeçlemede yitim etmeni (loss factor) adını alır.

$$G_{dB} = (20\log_{10} e)G$$
$$G_{dB} = -20\log_{10} e^{-G} \qquad (11.39)$$
$$G_{dB} = -20\log_{10}|H(jw)|$$

(11.39) denkleminde desibele çevirmek için G parametresi 20 $\log_{10}e$ ile çarpılmıştır. Söz konusu denklem, bir süzgecin istenen herhangi bir frekanstaki yitimini verir. Örneğin bir süzgecin w_1 frekansındaki yitimi

$$G_{dB} = -20\log_{10}|H(jw_1)|$$

dir.

Desibel ölçeklemesi

Desibel bir logaritmik ölçeklemedir ve (Robinson 1967, s 340-341),

$$\frac{V_2}{V_1}\,dB = 20\log_{10}\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \qquad (11.40)$$

olarak tanımlanır. Burada V_1 ve V_2 akım (Amper) veya gerilim (Volt) olarak ölçülmüş büyüklüklerdirler. Eğer P_1 ve P_2 güç (Watt) olarak ölçülmüşse, dB ölçeklemesi:

$$\frac{P_2}{P_1}\,\mathrm{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \tag{11.41}$$

olarak verilir. P_1 ve P_2 bir R direncinde V_1 ve V_2 gerilimlerinin oluşmasındaki güç düzeyleri olarak düşünülür. Örneğin $V_2/V_1=10$ olsun, (11.40) bağıntısından:

$$\frac{V_2}{V_1}\,\mathrm{dB} = 20\log_{10} 10 = 20\,\mathrm{dB}$$

elde edilir. P_1 ve P_2 güçleri V_1^2 ve V_2^2 ile orantılı olduğundan, $(P_2/P_1)=100$ dür. (11.41) den,

$$\frac{P_2}{P_1}\,\mathrm{dB} = 10\log_{10} 100 = 20\,\mathrm{dB}$$

bulunur. Görüldüğü gibi, verinin gerilim, akım veya güç olması durumlarında aynı sonuç elde edilir. Aşağıda bazı gerilim ve güç oranları için dB ölçeklemeleri verilmiştir (Özdemir 1981).

V2/V1	**P2/P1**	**dB**
1	1	0
1.41	2	3
1.73	3	4.8
2	4	6
3.16	10	10
10	100	20
31.6	1000	30
100	104	40
316	105	50
1000	106	60

11.6.2 Doğrusal dizgede bozulma (distorsiyon)

Genellikle bir dizgenin girişine uygulanan büyüklükle, çıkışından elde edilen büyüklük arasında biçim bakımından farklılıklar vardır. Böyle bir durumda, dizgenin kendisine uygulanan büyüklüğü bozduğu veya distorsiyona uğrattığı söylenir. Ancak izlerin bozulmasız iletimi denildiğinde çıkış büyüklüğünün mutlaka giriş büyüklülüğüne eşit olması gerekliliği anlamı çıkarılmamalıdır. İki büyüklük arasında bazı farklılıklar kabul edilebilir niteliktedir. Giriş ve çıkış izleri arasında büyüklük farklılıklarını bu sınır içinde bırakabilen dizgeye "bozulmasız dizge" denir.
Bozulmasız dizgenin matematiksel tanımı:

$$y(t) = K\,x(t-\tau) \tag{11.42}$$

olarak verilir. Başka bir deyişle, bir dizgenin girdi ve çıktı büyüklükleri arasında (11.42) denklemi ile belirlenen ilişki varsa, bu dizge bozulmasız olarak kabul edilebilir. (11.42) bağıntısındaki K genlik ile ve τ da kayma ile ilgili sabitlerdir.

Örnek 11.1
Şekil 11.5 teki dizgenin bozulmasız bir dizge olduğunu gösteriniz.

(11.42) denlemi kullanılarak, bozulmasız bir dizgenin dönüşüm işlevi bulunabilir. (11.42) nin her iki yanının FD alınarak:

$$Y(w) = K\,X(w)e^{-jw\tau} \tag{11.43}$$

elde edilir. Frekans ortamında dizgenin giriş ve çıkış ilişkileri ise:

$$Y(w) = X(w).\ H(w) \rightarrow H(w) = \frac{Y(w)}{X(w)}$$

$$H(w) = \frac{K\,X(w)e^{-jw\tau}}{X(w)} = K\ e^{-jw\tau} \tag{11.44}$$

olarak bulunur. (11.44) denkleminden hareketle bozulmasız bir dizgenin genlik ve evre yanıtlarının

$$|H(w)| = K \tag{11.45}$$

$$\phi(w) = -w\tau \tag{11.46}$$

olduğu görülür.

Bozulmasız iletim sağlayacak bir dizgeye ait gerekli ve yeterli koşullar aşağıda verilmektedir.

1. Sistemin genlik yanıtı olan $|H(w)|$ nın her frekans bileşeni için bir K değişmezine eşit olması gerekmektedir.
2. Evre yanıtı ise orijinden geçen bir doğru olmalıdır. Bu koşulun 2. Evre yanıtı ise orijinden geçen bir doğru olmalıdır. Bu koşulun "her frekans bileşeninin evresinin aynı miktarda kaydırılması" anlamına gelmediğine dikkat etmek gerekir. Eğer tüm frekans bileşen lerinin evreleri aynı miktarda kaydırılırsa kuşkusuz ki iz şekilsel olarak bozulmaya uğrayacaktır.

Bozulmasız bir dizgenin genlik ve evre yanıtları Şekil 11.6 da verilmiştir.

Genellikle bir dizgenin neden olduğu bozulma iki sınıfta toplanabilir.

Genlik bozulması

Dizgenin

$$|H(w)| \neq K \tag{11.47}$$

bağıntısını gerçeklemesi durumunda genlik bozulması oluşur. Eğer dizgenin genlik yanıtı, $|H(w)|$ tüm frekanslar için değişiyorsa, dizgenin çıkışında elde edilen büyüklüğün her frekans bileşeni farklı oranda değişecekler ve bunun sonucu olarak ta çıkış büyüklüğünün biçimi bozulacaktır.

Evre (gecikme) bozulması ve zaman (grup) gecikmesi)

Doğrusal evre kayması sinyalin tüm frekans bileşenlerini "τ" kadar öteler. Böylece çıkış sinyalinde bozulma olmaz. Eğer dizgenin evre kayması doğrusal değilse, başka bir deyişle, vre eğrisi bir doğru şeklinde değilse, "τ" ötelenmesi, frekansın bir işlevi olur. Bu durumda doğrusal olmayan bir $\phi(w)$ evre kaymasına karşı gelen zaman gecikmesi, evrenin bir işlevi olarak tanımlanır.

$$\phi(w) = -w\,\tau(w)$$
$$\tau(w) = -\frac{\phi(w)}{w} \qquad (11.48)$$

Zaman veya grup gecikmesi ise evre işleminin her frekanstaki değişiminin bir ölçüsüdür ve evre spektrumunun türevi olarak tanımlanır.

$$\tau'(w) = -\frac{d\phi(w)}{dw}$$

Örnek 11.2

Evresi

$$\phi(w) = -\tan\left(\frac{w}{w_0}\right) \qquad (11.49)$$

olarak verilen işlevin (Şekil 11.7) çeşitli frekanslardaki evre bozulmasını bulunuz.

(11.48) denkleminden

$$\tau(w) = -\frac{-\tan^{-1}\left(\frac{w}{w_0}\right)}{w} = \frac{1}{w}\tan^{-1}\left(\frac{w}{w_0}\right) \qquad (11.50)$$

yazılabilir. $w_n=nw_0$ binlerindeki zaman gecikmeleri n= 1/2,1,2 birim frekansları için:

$$\tau(w = w_0/2) = \frac{1}{w_0/2}\tan^{-1}\left(\frac{w_0/2}{w_0}\right) = \frac{2}{w_0}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ = \frac{\pi}{6}\text{ rad}$$

$$\tau(w = w_0/2) = 1.0472\frac{1}{w_0}\text{ sn}$$

$$\tau(w = w_0) = \frac{1}{w_0}\tan^{-1}\left(\frac{w_0}{w_0}\right)$$

$$\tan^{-1}(1) = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$\tau(w = w_0) = \frac{1}{w_0}0.7854$$

olarak elde edilir.

Burada önemli bir nokta "değişmez zaman gecikmesi" ile "değişmez evre gecikmesi" nin birbirlerinden farklı fiziksel kavramlar olmalarıdır. "Değişmez zaman gecikmesi" istenen bir olaydır. Çünkü yukarıdaki örnekte de görüldüğü gibi bu durumda evre gecikmesi oluşmayacaktır. Ancak "değişmez evre gecikmesi" ise evre bozulmasına yol açar.

Örnek 11.3

Bir süzgecin (Bölüm 11.8) evre spektrumu, α bir sabit olmak üzere $\phi(w) = -2\pi\alpha$ olarak verilmektedir. Bu süzgecin uygulanan sinyaldeki zaman gecikmesini dalgaboyuna bağlı olarak bulunuz.

(11.48) denkleminden:

$$\tau(w) = -\frac{\phi(w)}{w} = -\frac{-2\pi\alpha}{w} = \frac{2\pi\alpha}{w}$$

yazılır.

$$w = \frac{2\pi}{T}$$

olarak alınırsa

$$\tau(w) = \frac{2\pi\alpha}{\frac{2\pi}{T}} = \alpha T$$

$$\tau(w) = \alpha T \qquad (11.51)$$

dalgaboyuna bağlı olarak zaman gecikmesi bulunur.

Örnek 11.4

$$x(t) = \cos(3w_0t) - \frac{1}{3}\cos(3w_0t) + \frac{1}{5}\cos(5w_0t)$$

sinyali, evre spektrumu $\phi(w) = -\pi/2$ olan bir süzgeç ile süzgeçlenmektedir. Çeşitli frekans binlerindeki zaman gecikmelerini bulunuz.

(11.48) den

$$\tau(w) = -\frac{\phi(w)}{w} \quad , \quad w_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\alpha}{w}$$

$$\tau(w) = -\frac{-\pi/2}{w} = \frac{\pi}{2w}$$

$w = w_0, w = 3w_0, w = 5w_0$ binlerindeki zaman gecikmeleri:

$$\tau(w = w_0) = \frac{2\pi}{w_0} = \frac{\pi}{2(2\pi/T)} = \pi\frac{T}{4\pi} = \frac{T}{4}\text{ sn}$$

$$\tau(w = 3w_0) = \frac{\pi}{2.3\,w_0} = \frac{\pi}{6(2\pi/T)} = \frac{T}{12}\text{ sn}$$

$$\tau(w = 5w_0) = \frac{\pi}{2.5\,w_0} = \frac{\pi}{10(2\pi/T)} = \frac{T}{20}\text{ sn}$$

Örnek 11.5

4. örnekte verilen sinyal her bir frekans bileşeninde $\phi(w) = -\pi/4$ kayma yapan bir süzgeç ile süzgeçlenmektedir. Böyle bir süzgeç çıkışında, 0.12 sn boyundaki bir dalganın çeşitli frekanslardaki gecikme miktarlarını bulunuz.

$$\tau(w) = -\frac{\phi(w)}{w} = -\frac{-\pi/4}{w} = \frac{\pi}{4w}$$

$$\tau(w = w_0) = \frac{\pi}{4w_0} = \frac{\pi}{4}\frac{T}{2\pi} = \frac{T}{8} = \frac{0.12}{8} = 15x10^{-3}\text{ sn gecikir}$$

$$\tau(w = 3w_0) = \frac{\pi}{12w_0} = \frac{\pi}{12}\frac{T}{2\pi} = \frac{T}{24} = \frac{0.12}{24} = 5x10^{-3}\text{ sn gecikir}$$

$$\tau(w = 5w_0) = \frac{\pi}{20w_0} = \frac{\pi}{20}\frac{T}{2\pi} = \frac{T}{40} = \frac{0.12}{40} = 3x10^{-3}\text{ sn gecikir}$$

$$y - K = \frac{K.w + 0.2K}{-0.2} = \frac{K}{0.2}w$$

Örnek 11.6

Şekil 11.8 de bir ideal alçak geçişli süzgecin evre eğrisi verilmiştir. Bu tip süzgeçlerin zaman gecikmesinin frekans ile değişmediğini gösteriniz.

Doğrunun denklemi : $\frac{w + 0.2}{-0.2 - 0} = \frac{y - K}{K - 0}$

$$y - K = \frac{K.w + 0.2K}{-0.2} = \frac{K}{0.2}w$$

Zaman gecikmesi;

$$\tau(w) = -\frac{\phi(w)}{w}$$

$$\tau(w) = -\frac{-\frac{K}{0.2}w}{w} = \frac{K}{0.2}$$

w dan bağımsız olduğundan zaman gecikmesi frekansa bağlı değildir.

11.7 DOĞRUSAL OLMAYAN BOZULMA

Eğer dizge doğrusal değilse, girişe uygulanan büyüklük çıkışta kesinlikle bozulmaya uğrayacaktır. Ancak bu durumda dizgenin dönüşüm işlevi tanımlanamadığından çıkış büyüklüğü kolayca bulunamaz. Jeofizikte bu tür bozulmalar ile ilgilenilmez.

11.8 DOĞRUSAL SÜZGEÇLER

İletişim kuramında doğrusal dizgenin en çok kullanılma alanı doğrusal süzgeçlerdir. Bir süzgeç kabaca belirli bir frekans bandını geçiren bir dizge olarak düşünülebilir.

Süzgeçler gerçekleştirilebilmeleri yönünden ikiye ayrılırlar:

11.8.1 İdeal süzgeçler

Daha çok sinyal analizinde kullanılırlar. Dönüşüm işlevleri ve diğer özellikleri matematikseldir. Jeofizikte kullanılan tüm sayısal süzgeçler bu türe girer.

11.8.2 Gerçek süzgeçler

İdeal olarak düşünülen süzgeçlerin devre elemanları (direnç self, kapasite vd.) kullanılarak gerçeğe uygulanmasıdır. Bu tür süzgeçlerdeki dönüşüm işlevi devrede kullanılan elemanlara bağlıdır. Bu konu daha çok elektronikçilerin ilgi alanına girer.

Gerek ideal gerekse gerçek süzgeçler geçirdikleri bantlara göre üç ana gruba ayrılırlar:

a. İdeal (gerçek) bant geçişli süzgeç
b. İdeal (gerçek) alçak geçişli süzgeç
c. İdeal (gerçek) yüksek geçişli süzgeç

İdeal bant geçişli süzgeç

Alt kesme frekans (w_1) ile üst kesme frekans (w_2) arasındaki tüm frekans bileşenlerini bozulmasız olarak geçiren süzgeçlerdir. $w_1 \leq |w| \leq w_2$ frekans bölgesine süzgecin geçirme (geçiş) bandı denir (Şekil 11.9). Bant genişliği ise (+) frekans bölgesindeki geçirme bandının uzunluğudur (Şekil 11.9 da "B" ile gösterilmiştir). İdeal bir bant geçişli süzgecin dönüşüm işlevi matematiksel olarak,

$$H(w) = \begin{cases} K\,e^{-jwt} & w_1 \le w \le w_2 \\ 0 & \text{diğiğ durumlarda} \end{cases} \qquad (11.52)$$

verilir. İdeal bant geçişli bir süzgecin bant genişliği ise:

$$B = w_2 - w_1 \qquad (11.53)$$

dır.

İdeal alçak geçişli süzgeç

Bant geçişli bir süzgeçte $w_1=0$, $w_2=B$ alınarak alçak geçişli süzgeçler elde edilir (Şekil 11.10). Bunun dönüşüm işlevi ise:

$$H(w) = \begin{cases} K\,e^{-jwt} & |w| \le w_2 \\ 0 & |w| > w_2 \end{cases} \qquad (11.54)$$

dır.

İdeal yüksek geçişli süzgeç

İstenen bir w_1 değerine sahip ancak $w_2=\infty$, dolayısı ile $B=\infty$ olan süzgeç türüdür. Bu süzgecin dönüşüm işlevi Şekil 11.11 de verilmiştir. Yüksek geçişli bir süzgecin dönüşüm işlevinin matematiksel bağıntısı ise:

$$H(w) = \begin{cases} K\,e^{-jw\tau} & |w| \ge w_1 \\ 0 & |w| < w_1 \end{cases} \qquad (11.55)$$

dır.