BÖLÜM 9

ÖRNEKLEME KURAMI

9.1 GİRİŞ

Sinyallere veri işlem tekniklerinin uygulanabilmesi için, her şeyden önce, onların belirli bir aralıkla sayısallaştırılmaları gerekir. Burada sözü edilen "belirli aralık" örnekleme aralığıdır. Sinyallerin sayısallaştırılmasında kullanılan örnekleme konusu burada iki aşamada verilecektir. Birinci aşamada örnekleme türleri ve bu türlere ait istatistiksel özellikler, ikinci aşamada ise herhangi bir işlevin sayısallaştırılması sırasında karşılaşılan sorunlar anlatılacaktır.

9.2 İSTATİSTİKTE ÖRNEKLEME ÇEŞİTLERİ

Kendisinden daha büyük kitleleri temsil etme özelliğine sahip malzeme yada malzemeler grubuna örnek denir. Bu amaç için yapılan işleme de örnekleme adı verilir. Örneklemede üç ana hedef vardır.

1. Araştırma için örnekleme
Herhangi bir kitlenin jeolojik istifini çıkartmak veya kitleyi oluşturan birimlerin fiziksel ve kimyasal özelliklerini bularak kitlenin özellikleri hakkında bilgi edinmek amacı için yapılır. Örneğin manyetik alanlarda ölçme yapılırken gözlem noktalarından temel kayaca ait örnekler alınarak manyetik duyarlıkları saptanır. Böylece o bölgeye ait duyarlık dağılımına ait genel bilgi edinilir.

2. Kasıtlı örnekleme

Araştırma amacına ulaştıktan sonra örnekler belirli bir kullanım için seçilebilir. Örneğin yukarıda verilen örnekte duyarlık ile manyetik alanın değişimi incelenirken kasıtlı olarak, manyetik alanın yüksek olduğu yerlerden duyarlık ölçümü için örnekler seçilebilir. Ancak bu tip örneklemeler ile istatistiksel yorumlamalar yapılamaz.

3. İstatistiksel örnekleme

Örnekleme planında bir gelişigüzellik yöntemi içeren örnekleme şeklidir. İstatistiksel örnekleme deyimi; kitledeki her elemanın seçilen örnekte yer alma olasılığının birbirine eşit düşecek bir değere sahip olduğu varsayımına dayandırıldığından, özellikle kullanılır.

9.3 BAZI STANDART ÖRNEKLEME YÖNTEMLERİ

Doğada, kitleler sonsuz sayıda bireylerden oluşur. Ancak istatistiksel örneklemede zorunlu olarak sonlu sayıda bireylere sahip kitlelerin örneklemesi yapılır.

Jeofizikte çok kullanılan bazı istatistiksel örnekleme yöntemleri kısaca aşağıda verilmektedir.

9.4 BASİT GELİŞİGÜZEL ÖRNEKLEME

"N" adet verinin gelişigüzel seçilmesinden oluşur. Şekil 9.1 de bir kesit boyunca alınmış 10 adet gelişigüzel örnek görülmektedir (koyu noktalar). Şekilden de izlendiği gibi bu tip

örneklemelerde bir tekdüzelik yoktur. Örnek alımında yer yer sıklıklar, yer yer de seyreklikler görülmektedir.
"N" adet bireyden oluşmuş bir kitleden seçilen, büyüklüğü "n" olan bir basit gelişigüzel örneğin anlamı: "n" adet elemana sahip tüm kümelerin seçilme olasılıklarının aynı olması demektir. "μ" ile gösterilen kitlenin örnekleme değeri:

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \tag{9.1}$$

Bu bağıntıda:

$y_i : y_1, y_2, y_3, \ldots y_N$ "N" bireyden oluşan kitlenin her bir bireyinin değeridir.

Kitlenin σ^2 ile gösterilen varyansı

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (y_i - \mu)^2 \tag{9.2}$$

bağıntılarından yararlanarak elde edilir. Örneklemenin aritmetik ortalamaları "$\bar{x}$" ve örnekleme varyansı "s^2" ise:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{9.3}$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{N} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 \tag{9.4}$$

dır.

Burada: $x_i : x_1 , x_2 , x_3 , \ldots x_n$ "n" bireyden oluşan örneğin her birinin değeridir.

Bu örneğe dayanarak kitlenin kestirilen (tahmini) beklenen değeri

$$\hat{\mu} = \bar{x} \tag{9.5}$$

kestirilen varyansı da

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 \tag{9.6}$$

dır. Potansiyel alan ölçmelerinde kullanılan yelpaze şeklinde ölçü alma bir gelişigüzel basit örnekleme tipidir.

9.5 SİSTEMATİK ÖRNEKLEME

Örneklerin kitle üzerinde tekdüze bir dağılım göstermesi istendiğinde veya örnekleme için harcanan paranın çok sınırlı olması durumlarında sistematik örneklemeye başvurulur (Şekil 9.2). Örneklerin alınacağı kesitin başlangıcı gelişigüzel seçilir. Ancak bundan sonra gelen örneklerin alımı belirli bir kurala göre yapılır. Örneklerin alındığı tüm noktaların arasında sabit Δx kadar bir uzaklığın olması istenir. Böylece diğer örnekler bu kurala bağımlı olarak alınır. Bu tip örneklemelerde kitlenin beklenen değeri $\hat{\mu}$ nün yaklaşık değeri,

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{9.7}$$

dır. x_1, x_2, x_3,....., x_n ise sistematik örneklerin her birinin değeridir. Kitle hakkında başka bilgiler olmadıkça sistematik örnekleme ile kitlenin varyansı kestirilemez.

Anlatılan iki tip örneklemenin dışında daha başka örnekleme tipleri vardır. Çok aşamalı örnekleme, katmanlı (tabakalı) örnekleme, vd. gibi. Ancak jeofizikte en çok kullanılan örnekleme tipleri yukarıda anlatılanlardır. Örnekleme konusunda daha ayrıntılı bilgi Krumbein ve Graybill (1965) tarafından verilmektedir.

9.6 BİR İŞLEVİN ÖRNEKLENMESİ

Jeofizikte sinyaller genellikle zaman veya uzay ortamında elde edilirler. Dolayısı ile örneklemeler bu ortamlarda yapılır. Zaman veya uzay ortamındaki örneklemeler ile frekans veya dalgasayısı ortamı örneklemelerinin yakın ilişkisi vardır.

9.7 ZAMAN ORTAMINDA ÖRNEKLEME

Bir işlevin eşit aralıklı olarak örneklenmesinin anlamı; işlevin Δt aralıklı birim dürtülerden oluşmuş n boylu bir birim dürtü katarı ile (tarak işlevi) çarpılması demektir (Şekil 9.3).

Not: Birim dürtü işlevi $\delta(t)$, tarak işlevi ise $\hat{\delta}(t)$ simgeleri ile gösterilmiştir.

Tarak işlevine dikkat edilirse Δt kadar ötelenmiş birim dürtülerden oluştuğu anlaşılır (Bkz. Bölüm 6.1). Eğer herhangi bir koordinat noktasındaki örneklenmiş işlevin değeri bulunmak istenirse Bölüm 6.1 den

$$\int_{-\infty}^{\infty} \partial(t-\Delta t) f(t) = f(\Delta t) \tag{9.8}$$

yazılabilir. Bu işlemin, tarak işlevi kullanılarak sürekli hale getirilmesi:

$$\hat{\partial}(n\Delta t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \partial[t-(n\Delta t)] \tag{9.9}$$

demektir. Herhangi bir sürekli f(t) işlevinin, tarak işlevi ile örneklenmesi, f(t) işlevinin bir tarak işlevi ile çarpılmasıdır. Böylece sürekli işlev, Δt aralıklarla örneklenerek "n" adet ayrık değerden oluşur.

$$f(n\Delta t) = f(t)\,\hat{\partial}(n\Delta t) \tag{9.10}$$

$\hat{\partial}(n\Delta t)$ nin değeri (9.9) denkleminde kullanılarak ayrık işlev;

$$f(n\Delta t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(n\Delta t)\partial[t-(n\Delta t)] \qquad (9.11)$$

elde edilir. Bu denklemde $f_n(n\ \Delta t)$; f(t) işlevinin n Δt noktasındaki ayrık (sayısal) değeridir.

9.8 FREKANS ORTAMINDA ÖRNEKLEME

Bölüm 6.2 de $t_0 = \Delta t$ koyarak Δt kadar ötelenmiş dürtü işlevinin FD

$$\Im[\partial(t-\Delta t)] = e^{-jw\Delta t}$$

olarak yazılabilir. Eğer öteleme "n" kez oluşturulup FD alınacak olursa tarak işlevinin FD elde edilir.

$$D(w) = \Im[\partial(t-n\Delta t)] \qquad (9.12)$$

$$D(w) = \Im[\partial(t-n\Delta t)] = w_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \partial(w-nw_0) \qquad (9.13)$$

$$D(w) = \frac{2\pi}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \partial(w-nw_0) \qquad (9.14)$$

Not: Tarak işlevi FS leri ile

$$\partial(n\Delta t) = \frac{1}{t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jnw_0 t}$$

gösterilebilir. Her iki tarafın FD alınırsa

$$\Im[\partial(t-n\Delta t)] = \frac{1}{t}\Im\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jnw_0 t}\right]$$

ulaşılır. (5.13a) denkleminden eşitliğin sağ tarafı

olarak elde edilir. Burada $w_0 = 2\pi/\Delta t$ ile gösterilen temel frekans, D(w) da tarak işlevinin FD dür.

Tarak işlevinin FD olarak (9.13) ve (9.14) denklemlerine ulaşılır (Şekil 9.4). (9.13) ve (9.14) e FD nün evrişim özelliği kullanılarak ta varılabilir. Bilindiği gibi bir ortamda çarpımı yapılan iki işlevin, diğer ortamda evrişimi alınmalıdır. Dolayısı ile zaman ortamında verilen (9.10) denklemi, spektrum ortamında evrişime dönecektir.

$$\Im[f(n\Delta t)] = F(w) * D(L.\Delta w) \qquad (9.15)$$

(9.15) bağıntısında; $F(w) = \Im[f(t)], D(L.\Delta w) = \Im\left[\hat{\partial}(n.\Delta t)\right]$ ve L frekans ortamı sayacıdır.

(9.15) denklemi herhangi bir f(t) işlevinin zaman ortamında Δt aralığına sahip bir tarak işlevi ile çarpılmasının, spektrum ortamında durmaksızın yinelenmelere neden olacağını göstermektedir.

$$F(w) * D(L.\Delta w) = \sum_{L=-\infty}^{\infty} F[w - (L.\Delta w)] \tag{9.16}$$

(9.16) denkleminin gerek zaman, gerekse frekans ortamında ne anlama geldiği Şekil 9.5 te açıklanmaktadır.

Şekil 9.5a da örneklenecek sinüzoidal işlev görülmektedir. Eğer sinüzoidal tam döneminin (T) 1/4 ü kadar aralıkta örneklenirse veya jeofizik dilinde bu terimi en küçük yarım dalgaboyunun yarısı olarak belirtirsek doğru örnekleme yapılmış olur. Şekil 9.5a da verilen dalga Şekil 9.5b deki gibi sayısallaştırılırsa yine sinüzoidale benzer bir üçgen dalga elde edilir. Elde edilen dalganın döneminde bir değişiklik olmadığından frekansında da bir değişiklik yoktur. Oysa Şekil 9.5c de örnekleme aralığının büyük seçilmesinden kaynaklanan dalganın şekli ve dönemi dolayısı ile de frekansı değişmiştir. Söz konusu dalgaların spektrumları Şekil 9.6 da verilmektedir.

Örnekleme aralığı büyük seçildiğinde dalga şekli bozulur. İlk temel bin olan w_0 alçak frekanslara doğru kayar ve buna bağlı olarak ta frekans ortamı örnekleme aralığı Δw lar gereğinden çok küçülür. Böylece spektumda, ana sinyalimizde olmayan, alçak frekanslara kaymış yalancı binler oluşur.

En küçük yarım dalgaboyunun yarısı kavramını Şekil 9.7 de verilen bir gravite anomalisinde bir kez daha inceleyelim. Şekil 9.7 de 3 adet dalgaboyu vardır. Burada dalganın özelliğini bozmayacak en doğru örnekleme aralığı λ_3 ile gösterilen uzaklığın yarısıdır.

Buraya kadar dalgaboyu tek olan, dolayısı ile tek bir frekanstan oluşan bir sinüzoidalin yanlış örnekleme aralığından kaynaklanan yanılgıları verilmiştir. Oysa jeofizikte karşılaşılan olaylar hiç bir zaman böylesine yalın değildir. Söz konusu olay, biraz daha karışık bir sinyalde Şekil 9.8 görülmektedir.

Şekil 9.8 de verilen bant sınırlı bir verinin spektrumu ve doğru örnekleme sonucu ayrık spektrumu görülmektedir. Şekilde f_M ile gösterilen frekans, bant sınırlı veri içinde görülebilecek en yüksek frekanslı olaydır (gürültü bile olabilir). Gözlenen olayda daha yüksek frekanslı değişimlerin olmadığı varsayılır.

w_n veya f_n e "Nyquist" (katlanma) frekansı denir. Katlanma frekansı, bant sınırlı bir veride w_0 temel frekansının yarısına (f_N=1/2 Δt veya $w_N = \pi/\Delta t$) eşittir. -f_N ile +f_N arasında kalan aralığa ise "temel frekans aralığı" denir. (9.16) denklemi nedeni ile spektrum w_N veya f_N frekansı ile katlanarak ardalanır. Şekil 9.8c de spektrumu görülen verinin TFD alınıp zaman ortamına geçilirse ölçekleme farkı ile (1/Δt) Şekil 9.8a da verilen veri elde edilir.

Buraya dek anlatılan örnekleme kuramının zaman ve frekans ortamına ait işlemleri aşağıdaki adımlarda verilmektedir (Şekil 9.9).

Zaman ortamı	Frekans ortamı
+------------------------+	+------------------------+

```
I- ¦Sürekli işlev tarak işle-¦         ¦Sürekli işlevin FD ile ta-¦
   ¦vi  ile bire bir çarpıla-¦   +--+   ¦tarak işlevinin FD lerinin¦
   ¦rak (Şekil 9.9a  ve 9.9b)¦<--¦FD¦-->¦(Şekil 9.9a' ve 9.9b') ev-¦
   ¦zaman ortamı örneklenmiş,¦   +--+   ¦rişiminden, spektrum orta-¦
   ¦ayrık  veri  elde  edilir¦          ¦mında örneklenmiş veri el-¦
   ¦(Şekil 9.9c)             ¦          ¦de edilir (Şekil 9.9c')   ¦
   +-------------------------+          +--------------------------+

   +-------------------------+          +--------------------------+
II-¦Dikdörtgen  işlevin diğer¦          ¦Dikdörtgen işlev ile (fr. ¦
   ¦ortamdaki  görünümü  olan¦          ¦ortamında tanımlanmış,    ¦
   ¦sinc  işlevi (Şekil 9.9d)¦          ¦Ddr(w) (Şekil 9.9d'), ör- ¦
   ¦ile  örneklenmiş  işlevin¦   +--+   ¦neklenmiş verinin spektru-¦
   ¦(Şekil 9.9c) evrişimi so-¦<--¦FD¦-->¦munun (Şekil 9.9c') ±wc a-¦
   ¦nucu (Şekil 9.9e) sürekli¦   +--+   ¦ralığındaki bire bir çar- ¦
   ¦işleve (Şekil 9.9a)  yak-¦          ¦pımından (Şekil 9.9e') sü-¦
   ¦laşılır                  ¦          ¦rekli işlevin spektrumuna ¦
   +-------------------------+          ¦(Şekil 9.9a') yaklaşılır. ¦
                                        +--------------------------+
```

Şekil 9.9 dan görüldüğü gibi zaman veya frekans ortamındaki örneklemelerin birbirinden farklılığı yoktur. Örnekleme hangi ortamda yapılırsa yapılsın sonuçta asıl sürekli işleve yaklaşılır. Örneğin Şekil 9.9a da verilen zaman ortamındaki sürekli işlevle Şekil 9.9e de elde edilen örneklenmiş işlev aynıdır. Benzer olay spektrum ortamında da görülmektedir. Sürekli verinin spektrumu ile (Şekil 9.9a’) örneklenmiş verinin spektrumu (Şekil 9.9e’) arasında farklılık yoktur. Buraya dek verilenler örnekleme aralığının doğru seçilmesi durumundaki olaylardır. Eğer örnekleme aralığı gereğinden büyük seçilirse karşılaşılacak sorunlar Şekil 9.10 da verilmektedir. Şekilden de görüldüğü gibi zaman ortamında örneklenmiş sinyal (Şekil 9.10e) asıl işleve (Şekil 9.10a) benzememektedir. Dolayısı ile yanlış örnekleme sonucu elde edilen spektrum da (Şekil 9.10e’) asıl verinin spektrumundan (Şekil 9.10a') farklıdır.

9.8 Frekans katlanması (aliasing)

Limit durumunda, $\Delta t = 1/2f_N$ seçildiğinde, f_M ile f_N çakışır (Şekil 9.11). Örnekleme aralığı, gereğinden büyük tutulduğunda $f_N=1/(2\Delta t)$ bağıntısına uygun olarak katlanma frekansı düşük frekanslara doğru kayar (Şekil 9.12). Böylece veride olmayan, alçak frekanslarda görülen yalancı (görüntü) spektrumlar ortaya çıkar. Bunlar asıl spektrumdan kolay kolay ayrılamazlar.

Herhangi bir veri, kurala uygun olarak örneklenip spektrumu alındıktan sonra, yapılan örneklemenin doğru olup olmadığının araştırılmasının en iyi yolu onun TFD alınarak asıl veri ile şekilsel benzeşimine bakılmasıdır.

Çok küçük örnekleme aralıkları seçilerek frekans katlanmasının önüne kesinlikle geçilebilir. Ancak çok küçük örnekleme aralığının seçilmesi fazla veri oluşturacağından hem zaman hem de gereksiz bilgisayar kullanımına neden olacaktır.

9.9 ÖRNEKLER

Bu bölümde zaman ve frekans ortamına bağlı olarak örnekleme aralığının değişimi ile ilgili uygulamalar verilecektir.

a. Zaman ortamı örnekleme aralığının değişmesi ve frekans ortamında oluşan olaylar Şekil 9.13, 9.14 ve 9.15 te verilmektedir. Aynı gravite sinyali Δt=2.5 km (Şekil 9.13), Δt=5 km (Şekil 9.14), Δt=10 km (Şekil 9.15) ile örneklendiğinde, spektrum ortamındaki değişimler aynı Şekillerin "b" ve "c" lerinde görülmektedir. Bu şekillere dikkat edildiğinde, örnekleme aralığı büyüdükçe, zaman ortamındaki eğri yuvarlanmakta, genlik spektrumundaki yüksek frekanslı değişimler ortadan kalkmaktadır. Örneğin Şekil 9.13b de 6 ve 9 binlerinde görülen pikler Şekil 9.14b de iyice azalmakta, Şekil 9.15b de ise tümüyle yok olmaktadır Bu örnekte görüldüğü gibi örnekleme aralığı büyüdükçe eğri aşırı bir şekilde yuvarlatılmakta, dolayısı ile yüksek frekanslı (kısa dalgaboylu) değişimler ise yitmektedir.

b. Şekil 9.16 da Armutlu-Kocaeli yöresinden elde edilen gravite kesidine ait arazi değerleri ve Talwani yöntemi ile elde edilen model yapı görülmektedir (Akgün, 1987). Söz konusu iz önce kendi boyunda daha sonraları da boyunun iki ve dört katı seçilerek spektrumu alınmıştır (Şekil 9.17). Uzay ortamındaki izin boyu arttırıldıkça, spektrum ortamındaki temel frekans bini (f_0) düşey eksene yaklaşmış dolayısı ile de frekans ortamı örnekleme aralığı (Δf) küçülmüştür. Örnekleme aralığının küçülmesi ile spektrum eğrisi ayrıntılaştırılmış, yüksek frekans içeren olaylar ortaya çıkartılmıştır. Kuşkusuz ki bu konu aynı zamanda pencere boyu ile de ilişkilidir (Ayrıntılı bilgi için Bkz Bölüm 10.3).