BÖLÜM 8
AYRIK FOURİER DÖNÜŞÜMÜ (AFD)

İzler veri işlem yöntemlerinin uygulanabilmesi için, örneklenerek ayrık hale getirilir. Eğer bu veriler çeşitli nedenlerden dolayı spektrum ortamına aktarılacaksa AFD kullanılır. HAFD ise hem işlemin hızını hem de yöntemin duyarlılığını artırır.

8.1 VERİLER DÖNÜŞTÜRÜME HAZIRLANIRKEN DOĞACAK SORUNLAR

Dönüşümü alınacak veriler uygun biçimde hazırlanmazsa aşağıdaki sorunlar oluşur.

1. Katlanma (yitim,aliasing)
Örnekleme aralığının uygun seçilmemesinden kaynaklanır. Bu konuya Bölüm 9.8 de değinilmektedir.

2. Sızma (Leakage)
Bu sorun , $-\infty$ dan $+\infty$ a dek sürdüğü varsayılan verilerin bir T aralığında kesilmesinden oluşur. Çünkü ∞ uzunluktaki verinin enerjisi bu uzunlukta dağılmıştır. Ancak veri, T boyu ile sınırlandığında sonsuz boyda olan enerji bu T aralığında toplanmış olur (T aralığının dışında kalan değerler sıfır varsayıldığından enerji de buralarda sıfırdır). O zaman bu kesilmeden dolayı frekans ortamında yan loblara enerji sızma olayı oluşur. Oysa istenen; tüm enerjinin merkezde toplanmasıdır.

Bilindiği gibi veriyi "T" gibi bir boy ile sınırlamak demek; T aralığında, veriyi T boyunda bir dikdörtgen pencere ile çarpmak anlamındadır. Bu pencerenin spektrumu ise bir sinc işlevidir. Frekans ortamında ise bu işlem verinin spektrumu ile pencere işlevinin spektrumunun evriştirilmesi demektir. Sorun bu pencerelemenin doğurduğu etkiyi küçültmektir. Bu amaçla pencereleme işlemi için farklı işlevler kullanılır. Bu konuya 10. Bölümde değinilecektir.

3. Çit etkisi (Picket-fence effect)

Dikdörtgen pencerenin spektrumu olan sinc(f) işlevinin temel salınımlarının, spektrumda, geçirim zonundaki çeşitli binlerde oluşturduğu (Şekil 8.1) bombelerdir (yan salınımlar değil).

Dönüşüm, dikdötgen pencerenin spektrumu olan (Fourier katsayılarından oluşmuş bağımsız süzgeç görünümlü) bir dizi sinc işlevi ile verinin spektrumunun evrişimidir (Şekil 8.2).

8.2 YAVAŞ AYRIK FOURIER DÖNÜŞÜMÜ

Şekil 8.3 ve 8.4 sırası ile sürekli bir zaman işlevi, onun ayrık değerleri ve bu zaman işlevinin frekans ortamındaki durumu görülmektedir. Şekildeki parametreler ve tanımları aşağıda verilmiştir.

f(t) : Sürekli zaman işlevi.
f(k) : Ayrık zaman işlevi.
k : Zaman sayacı n=0,1,...,K-1.
K : Zaman ortamı nokta sayısı.
Δt : Örnekleme aralığı.
2T : Zaman serisinin uzunluğu $2T=k\,\Delta t$

f_{NY} : Katlanma (Nyquist) frekansı, spektrumda görülmesi istenen en büyük frekanstır $f_{NY}=1/(2\Delta t)$

Δf : Frekans adım aralıkları.

$\Delta f = \dfrac{1}{2T}$ ayrık olarak $\Delta f = \dfrac{1}{k\,\Delta t}$

f_s : Yineleme frekansı $f_s = 1/t = k/2T = 2\,f_{NY}$.
(2T=k Δt den)

n : Frekans sayacı n=0, 1,...., 2N-1.

N : N=4T. f_{NY} içindeki toplam harmonik sayısı.

Eğer bir iz ayrık duruma getirilmiş ise bunun ayrık Fourier dönüşümü (AFD) için aşağıdaki bağıntılar geçerlidir.

$$F(n) = \sum_{k=0}^{K-1} f(k)e^{-j2\pi nk/K} \qquad \text{(frekans ortamı bağıntısı)} \qquad (8.1)$$

$$f(k) = \sum_{n=0}^{N-1} F(n)e^{j2\pi nk/K} \qquad \text{(zaman ortamı bağıntısı)} \qquad (8.2)$$

(8.1) ve (8.2) bağıntıları simgesel olarak

$$f(k) \leftarrow \Im \rightarrow F(n)$$
$$F(n) = \Im[f(k)]$$
$$f(k) = \Im^{-1}[F(n)]$$

şeklinde gösterilir. Sayısal bir zaman izinin AFD alındığında

$$f_s = 2\,f_{ny} = \frac{k}{2T}$$

bandı içinde yer alan bir dizi ayrık değer elde edilir.

Örnek 8.1

Şekil 8.5 de verilen izin AFD nü alınız.

Bu izin AFD (8.1) bağıntısı kullanılarak alınır.

$K = 4$ için

$$F(n) = \sum_{k=0}^{3} f(k)e^{-j2\pi nk/4} = \sum_{k=0}^{3} f(k)e^{-j\pi nk/2}$$

dir. n=0 için 1. harmonik

$$F(0) = \sum_{k=0}^{3} f(k)e^{-j\pi 0k/2} = \sum_{k=0}^{3} f(k) = f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$$

$$F(0) = 1+2+2+1 = 6 \quad F(0) = 6$$

n=1 için 2. harmonik

$$F(1)=\sum_{k=0}^{3} f(k)e^{-j\pi k/2}=f(0)e^{-j0\pi/2}+f(1)e^{-j1\pi/2}+f(2)e^{-j2\pi/2}+f(3)e^{-j3\pi/2}$$
$$F(1)=1+2\,e^{-j\pi/2}+2\,e^{-j\pi}+1\,e^{-j3\pi/2}$$
$$F(1)=1-2j-2+j \quad , \quad F(1)=-1-j$$

n=2 için 3. harmonik

$$F(2)=\sum_{k=0}^{3} f(k)e^{-j2\pi k/2}=\sum_{k=0}^{3} f(k)e^{-j\pi k}$$
$$F(2)=f(0)e^{0}+f(1)e^{-j\pi}+f(2)e^{-j2\pi}+f(3)e^{-j3\pi}$$
$$F(2)=1+2\,e^{-j\pi}+2\,e^{-j2\pi}+1\,e^{-j3\pi}=0 \quad , \quad F(2)=0$$

n=3 için 4. harmonik

$$F(3)=\sum_{k=0}^{3} f(k)e^{-j3\pi k/2}$$
$$F(3)=f(0)e^{0}+f(1)e^{-j3\pi/2}+f(2)e^{-j3\pi}+f(3)e^{-j9\pi/2}$$
$$F(3)=-1+j$$

Sonucun sınanması için birçok yol vardır. Bunlardan bir tanesi Parseval kuramıdır (Bkz Bölüm 5.6.2).

$$\sum_{k=0}^{K-1} f^2(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F^2(n)$$
$$\sum_{k=0}^{3} f^2(k)=1^2+2^2+2^2+1^2=10$$

Not: F(n)=a+jb olduğu anımsanırsa

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F^2(n)=\frac{1}{4}\left[F^2(0)+F^2(1)+F^2(2)+F^2(3)\right]$$
$$F^2(1)=(-1-j)^2=1+2j+j^2=2j$$
$$=\frac{1}{4}(36+2+0+2)=\frac{40}{4}=10$$

10=10 olduğu için işlem doğrudur.

8.3 HIZLI AYRIK FOURİER DÖNÜŞÜMÜ (HAFD)

AFD lerini normal yollardan yapmak zaman yitimine neden olmaktadır. Bu nedenle AFD yöntemleri bazı tekniklerle hızlandırılır. Bu yöntemlere HAFD denir. HAFD alabilmek için birçok yöntem vardır. Bunlar genellikle FD lerini bir dizey haline getirerek çözümleyen yöntemlerdir. Cooley-Tukey in geliştirdiği algoritmalarda HAFD leri iki farklı kümelenme biçiminde çözülür. Bunlar:

1. Zaman içinde kümelenme.
2. Frekans içinde kümelenmedir.

8.3.1 Frekans içinde kümelenme yöntemi kullanılarak HAFD

T dönemli bir işlevin FS nin karmaşık şekli

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \, e^{jnwt} \tag{8.4}$$

ve

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jnwt} \, dt \tag{8.5}$$

dır. Bu eşitliklerde:

w = Açısal frekans = 2πf.
f = Çizgisel frekans = 1/T.
T = Dönem.
j = $(-1)^{1/2}$.

FD çifti ise aşağıda verilmektedir.

$$F(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jwt} \, dt \tag{8.6}$$

[f(t) işlevinin FD]

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{jwt} \, dw \tag{8.7}$$

[F(w) işlevinin TFD]

(8.6) ve (8.7) denklemleri ile verilen işlevlerin ayrık gösterimi Şekil 8.6 da verilmektedir. Bu şekilde T zaman aralığı "K" sayıda eşit "Δt" örnekleme aralığı ile bölünmüştür (k=zaman ortamı sayıcısı). Benzer şekilde "w_N" açısal frekans aralığı "N" sayıda eşit "Δw" örnekleme aralığı ile bölünmüştür (n=frekans ortamı sayıcısı). Her iki ortamdaki N ve K değerleri birbirinden farklıdır. Ancak uygulamada kolaylık açısından her ikisi de aynı alınabilir. Frekans adımı olan Δw

$$\Delta w = 2\pi \Delta f = 2\pi \frac{1}{T\left(\frac{N}{K}\right)} = \frac{2\pi K}{NT} \tag{8.8}$$

olarak tanımlanır. (8.8) denkleminden de anlaşılacağı gibi Δf değerleri K/NT değerlerinden oluşmaktadır.

(8.6) ve (8.7) bağıntıları seri olarak yazıldığında ve (8.8) de işin içine katıldığında AFD

$$f(t_k) = \sum_{n=0}^{N-1} F(w_n) e^{jw_n t_k} \qquad (8.9)$$

$$F(w_n) = \sum_{k=0}^{K-1} f(t_k) e^{-jw_n t_k} \qquad (8.10)$$

durumuna gelir. (8.9) ve (8.10) bağıntıları (8.6) şeklinde verilirse, eğrilerin altında kalan alanı verir. Aşağıdaki gösterimler yapılırsa

$$\left.\begin{aligned} f_k &= f(t_k) \\ F_n &= F(w_n) \\ \Delta w &= n\,\Delta w = n\frac{2\pi K}{NT} \\ t_k &= k\,\Delta t = \frac{kT}{K} \\ \Delta t &= \frac{T}{K} \end{aligned}\right] \qquad (8.11)$$

$$e^{jw_n t_k} = e^{[(j2\pi nK/NT)(kT/K)]} = e^{[(2\pi j/N)(nk)]}$$

O zaman (8.9) ve (8.10) bağıntıları

$$f_k = \Delta w \sum_{n=0}^{N-1} F_n\, e^{[(2\pi j/N)(nk)]} \qquad (8.12)\pi$$

$$F_n = \sum_{k=0}^{K-1} f_k\, e^{[-(2\pi j/N)(nk)]} \qquad (8.13)$$

durumuna gelir. W= $e^{-2\pi j/N}$ konursa (8.13) bağıntısı:

$$F_n = \sum_{k=0}^{K-1} f_k\, W^{(nk)} \qquad (8.14)$$

Not: Burada katsayı dizeyi W ve frekans ortamı bağımsız değişkeni w olarak gösterilmiştir.

şeklini alır. (8.14) bağıntısı dizey (matris) şeklinde yazılırsa

$$\underset{(n.1)}{[F_n]} = \underset{(n.k)}{\left[W^{(nk)}\right]}.\underset{(k.1)}{[f_k]} \qquad \begin{aligned} n &= 0,1,2,\ldots\ldots\ldots N-1 \\ k &= 0,1,2,\ldots\ldots\ldots K-1 \end{aligned} \quad (8.15)$$

(8.15) bağıntısında n = satır, k = kolonu göstermektedir. nk = L ise W nın üssüdür.

$$W^L = e^{[-(2\pi j/n)L]} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}L\right) - j\sin\left(\frac{2\pi}{N}L\right) \qquad (8.16)$$

ile bilinir.

Örnek olarak N=8 için W^L değerlerini hesaplayalım:

$$W^L = e^{[-(2\pi j/8)L]} = \cos\left(\frac{\pi L}{4}\right) - j\sin\left(\frac{\pi L}{4}\right) \qquad L = 0,1,2,...,8 \qquad (8.17)$$

$$W^{L=0} = \cos(0) - j\sin(0) = 1$$

$$W^{L=1} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - j\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{(2)^{1/2}}{2}$$

$$W^{L=1} = \frac{(2)^{1/2}}{2} - j\frac{(2)^{1/2}}{2}$$

L=1 için sanal bileşen vardır.

Bölüm 4, Şekil 4.1 ve ilgili denklemlerden evre ve genlik

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \qquad \text{(evre)}$$

$$r = \left(a^2 + b^2\right)^{1/2} \qquad \text{(genlik)}$$

olarak yazılır. Burada b=sanal, a=gerçel işlevlerdir.

$$\phi = \tan^{-1}\left[\frac{(2)^{1/2}/2}{(2)^{1/2}/2}\right] \quad , \quad \phi = \tan^{-1}(1) \quad , \quad \phi = 45^\circ = \pi/4$$

$$r = (2/4 + 2/4)^{1/2} = 1 \qquad \text{(birim)}$$

Bu hesaplamalar L=8 e kadar yapılarak W'nın kuvvetleri elde edilir (Şekil 8.7).

Şekilden W^4 açısal frekansına göre W^L ve W^{-L} değerleri gerçel eksene göre bakışıktır. Bu nedenle $W^L(L>N/2)$ değerleri, W^{N-L} değerlerinin karmaşık eşleniğidir. Şeklin gerçel eksene göre bakışık olduğu frekans değeri (burada W^4) katlanma frekansıdır (N/2=8/2=4).

(8.15) bağıntısından yararlanarak FD leri dizey durumuna sokulur. Kolaylık açısından N=K=8 alınabilir. Söz konusu dizey bakışıktır. Dizey oluşturulurken Şekil 8.7 den yararlanılmıştır. Anılan dizey (8.18) denklemi ile verilmektedir.

Dizey çarpımı yapılırken: N^2 tane çarpma N(N-1) tane de toplama yapılmalıdır. Yani 8 nokta için 64 çarpma 56 tane de toplama yapmak gerekir. Bu nedenle (8.18) dizeyinde bazı düzenlemeler yapılabilir. Bu düzenlemeler çerçevesinde önce [W].[f] oluşturulur k

$\rightarrow$ kolon

n $\downarrow$

Satır

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} W^{0(0,0)} & W^{0(0,1)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots W^{0(0,7)} \\ W^{0(1,0)} & W^{0(1,1)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots W^{7(1,7)} \\ W^{0(2,0)} & W^{0(2,1)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots W^{6(2,7)} \\ W^{0(3,0)} & W^{0(3,1)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots W^{5(3,7)} \\ W^{0(4,0)} & W^{0(4,1)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots W^{4(4,7)} \\ W^{0(5,0)} & W^{0(5,1)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots W^{3(5,7)} \\ W^{0(6,0)} & W^{0(6,1)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots W^{2(6,7)} \\ W^{0(7,0)} & W^{0(7,1)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots W^{1(7,7)} \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{bmatrix} \qquad (8.18)$$

Kolon

$\rightarrow$ 0 1 2 7

$$\begin{aligned} F_0 &= f_0 + W^0 f_1 + W^0 f_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + W^0 f_7 \\ F_1 &= f_0 + W^1 f_1 + W^2 f_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + W^7 f_7 \\ F_2 &= f_0 + W^2 f_1 + W^4 f_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + W^6 f_7 \\ F_3 &= f_0 + W^3 f_1 + W^6 f_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + W^5 f_7 \\ F_4 &= f_0 + W^4 f_1 + W^0 f_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + W^4 f_7 \\ F_5 &= f_0 + W^5 f_1 + W^2 f_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + W^3 f_7 \\ F_6 &= f_0 + W^6 f_1 + W^4 f_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + W^2 f_7 \\ F_7 &= f_0 + W^7 f_1 + W^6 f_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + W^1 f_7 \end{aligned} \qquad (8.19)$$

- Başlangıç olarak F değerleri f değerlerine eşit kılınır.

$F_0 = f_0$

$F_1 = f_1$

$F_2 = f_2$

.

.

$F_7 = f_7$

- 0. kolonun elamanları, 1. kolonun elamanlarına eklenir.

$f_0 + W^0 f_1$

$f_0 + W^1 f_1$

$f_0 + W^2 f_1$

.

.

$f_0 + W^7 f_1$

daha sonra 0. kolon elemanları 2. kolonun elemanlarına, 0. kolon elemanları 3. kolonun elemanlarına eklenir. Burada,

W nın 1. kolonu f_1 ile ,
W nın 2. kolonu f_2 ile ,
.
. (dizey çarpım özelliği)
.
W nın 7. kolonu f_7 ile

çarpıldığına dikkat edilmelidir. Birinci kolonun elamanları $W_0 f_1$, $W_1 f_1$, $W_2 f_2$ ..., $W^{(N/2)} = W_4 = -W_0 = -1$ dir ve $W^{N/2}$ ye göre bakışıktır. W değerleri $W^{N/2}$ den sonrası için karmaşık eşleniktir. Bu nedenle yanlızca $W^0 f_1$, $W^1 f_1$, $W^2 f_2$, $W^3 f_3$, değerlerini hesaplamak yeterlidir.

- Aynı işlem N/2 den sonra olan satırlar içinde (4,5,6,7,) sürdürülürse;

$$\begin{aligned} W^4 f_1 &= -W^0 f_1 \quad , \quad W^5 f_1 = \overline{W^3 f_1} \\ W^6 f_1 &= \overline{W^2 f_1} \quad , \quad W^7 f_1 = \overline{W^1 f_1} \end{aligned} \qquad (8.20)$$

elde edilir. Üstteki çizgiler karmaşık eşleniği gösterir.

- Buraya kadar anlatılan işlem 2. kolon için de yapılır. Söz konusu İşlem yalnızca $W^0 f_2$ ve $W^2 f_2$ değerlerini için yapılacaktır. Çünkü;

$$W^4 f_2 = -W^0 f_2 \quad , \quad W^5 f_1 = \overline{W^2 f_2}$$

dir. Yukarıda verilen işlemler aşağıdaki gibi adımlar halinde verilerek hesaplama aşamasında kolaylık sağlanabilir.

1. Zaman artışları k, frekans artışları n ve tam zaman aralığı T ile gösterilir.
2. (8.16) bağıntısından yararlanarak L=0,1,2,., N-1 değerleri için W^L değerleri hesaplanır.
3. Her bir f_0 değeri kullanılarak F_0, F_1,...., F_{N-1} denklemleri oluşturulur [(8.19) denklemlerinin sıfırıncı kolonu].
4. (8.18) denklemindeki w dizeyinin elemanları, n satır, k kolon sayısı olarak ve k=1 den başlayarak n = 0,1,2,..., N-1 için L değerleri hesaplanır. W değerleri uygun f_k değerleri ile çarpılır. İlk L değerlerinin sıfır olmasına uygun olarak (8.18) dizeyinin sıfırıncı kolonundaki W nın kuvvetleri sıfırdır. L= N/2 olduğunda Wf karmaşık eşlenikleri WN/2 ye göre bakışık olduğu önceki değerlerden elde edilir. L=0 ise Wf değerleri yinelenir.

5. 4. adımda hesaplanan değerler F_0, F_1,.....,F_{N-1} in bulunan değerlerine eklenir.
6. 4. ve 5. adımlar k=2,3,...,N-1 için yinelenir.

F değerleri karmaşık sayılardan hesaplanır. F_i elemanlarının açısal frekansı $w=i\Delta w$ (i = 0,1,...,n) bağıntısına uygun olarak bulunur. Son olarak ta $F_{N/2}$ (= F4, N=8 için) ye göre F nin bakışık olmasından dolayı (8.18) bağıntısındaki kolon dizeyinin karmaşık eşleniği olduğu söylenebilir. Yani

$$F_5 = \overline{F_3} \quad , \quad F_6 = \overline{F_2} \quad , \quad F_7 = \overline{F_1}$$

olacaktır. Bu nedenle F değerinin $F_{N/2}$ den sonrası için hesaplanmalarına gerek yoktur.

(8.18) dizeyinde hesaplanan F_2 ve F_6 değerleri aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned} F_2 &= \underline{W^0 f_0} + W^2 f_1 + \underline{W^4 f_2} + W^6 f_3 + W^0 f_4 + W^2 f_5 + \underline{W^4 f_6} + W^6 f_7 \\ F_2 &= \underline{W^0 f_0} + W^6 f_1 + \underline{W^4 f_2} + W^2 f_3 + \underline{W^0 f_4} + W^6 f_5 + \underline{W^4 f_6} + W^2 f_7 \end{aligned} \qquad (8.21)$$

(8.21) denklemlerinde altı çizili olan değerler gerçel değerlerdir. Çünkü; $W^0=-W^4=1$ dir. Şekil 8.7 den de W^2 ve W^6 lı değerlerin ise karmaşık eşlenik olduğu (sanal bileşenli) görülmektedir. (8.21) bağıntısının kullanılmasından F_2 ve F_6 nın karmaşık eşlenik olacağı görülmektedir.

Örnek 8.2
Şekil 8.8 de ve sayısal değerleri Çizelge 8.1 de verilen izin HAFD alınız.

K=4 ve N=4 alalım (frekans ortamındaki nokta sayısı).

$$t = \frac{T}{K} = \frac{4}{4} = 1$$

Zaman adımları	**Zaman t**	**İşlev f(t)**
0	0	1
1	1	2
2	2	2
3	3	1

Çizelge 8.1 Örnek 2'nin ayrık değerlerri

1. (8.16) bağıntısından W^L değerleri bulunur.

$$W^L = \cos\left(\frac{2\pi}{N} L\right) - j\sin\left(\frac{2\pi}{N} L\right)$$

$* k = 0$

$n = 0 \quad L = 0 \quad \rightarrow \quad W^{00} = W^0 = 1$

$n = 1 \quad L = 0 \quad \rightarrow \quad W^{10} = W^0 = 1$

$n = 2 \quad L = 0 \quad \rightarrow \quad W^{20} = W^0 = 1$

$n = 3 \quad L = 0 \quad \rightarrow \quad W^{30} = W^0 = 1$

$* k = 1$

$n = 0 \quad L = 0 \quad \rightarrow \quad W^{01} = W^0 = 1$

$$n = 1 \quad L = 1 \quad \rightarrow \quad W^{11} = W^1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}1\right) - j\sin\left(\frac{\pi}{2}1\right) = -j$$

$$n = 2 \quad L = 2 \quad \rightarrow \quad W^{21} = W^2 = \cos\left(\frac{\pi}{2}2\right) - j\sin\left(\frac{\pi}{2}2\right) = -1$$

$$n = 3 \quad L = 3 \quad \rightarrow \quad W^{31} = W^3 = \cos\left(\frac{\pi}{2}3\right) - j\sin\left(\frac{\pi}{2}3\right) = +j$$

$* k = 2$

$n = 0 \quad L = 0 \quad \rightarrow \quad W^{02} = W^0 = 1$

$n = 1 \quad L = 2 \quad \rightarrow \quad W^{12} = W^2 = -1$

$$n = 2 \quad L = 4 \quad \rightarrow \quad W^{22} = W^4 = \cos\left(\frac{\pi}{2}4\right) - j\sin\left(\frac{\pi}{2}4\right) = 1$$

$$n = 3 \quad L = 6 \quad \rightarrow \quad W^{32} = W^6 = \cos\left(\frac{\pi}{2}6\right) - j\sin\left(\frac{\pi}{2}6\right) = -1$$

$* k = 3$

$n = 0 \quad L = 0 \quad \rightarrow \quad W^{03} = W^0 = 1$

$n = 1 \quad L = 3 \quad \rightarrow \quad W^{13} = W^3 = j$

$n = 2 \quad L = 6 \quad \rightarrow \quad W^{23} = W^6 = -1$

$$n = 3 \quad L = 9 \quad \rightarrow \quad W^{33} = W^9 = W^1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}9\right) - j\sin\left(\frac{\pi}{2}9\right) = -j$$

2. (8.18) dizeyi oluşturulur.

$\rightarrow k$

$n \downarrow$

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^{0(0,0)} & W^{0(0,1)} & W^{0(0,2)} & W^{0(0,3)} \\ W^{0(1,0)} & W^{1(1,1)} & W^{2(1,2)} & W^{3(1,3)} \\ W^{0(2,0)} & W^{2(2,1)} & W^{4(2,2)} & W^{6(2,3)} \\ W^{0(3,0)} & W^{3(3,1)} & W^{6(3,2)} & W^{1(3,3)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

W için bulunan değerler dizeyde yerine konursa

katlanma
ekseni

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

$$F_0 = 1 + 2 + 2 + 1 = 6$$
$$F_1 = 1 - 2j - 2 + j = -1 - j$$
$$F_2 = 1 - 2 + 2 - 1 = 0$$
$$F_3 = 1 + 2j - 2 - j = -1 + j$$

f_0 değerleri yerine yazılırsa

F0 = 1 + 2 + 2 + 1 = 6

F1 = 1 - 2j - 2 + j = -1 - j

F2 = 1 - 2 + 2 - 1 = 0

F3 = 1 + 2j - 2 - j = -1 + j

Elde edilen değerler Çizelge 8.2 de ve Şekil 8.9 da verilmektedir. Frekans adımları ise

$$\Delta w = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} = 1.5708$$

dır. Anımsandığı gibi "N" farklı olabilir. Ancak uygulamada kolaylık olması amacı ile N=K alınır.

Frekans adımı n	**Açısal frekans $w_n = n\Delta w$**	**Gerçel F (a_n)**	**Sanal (b_n)**	**Genlik $\lvert F \rvert$**
0	0	6	0	6
1	1.5708	-1	-1	1.4142
2	3.1416	0	0	0
3	4.7124	1	1	1.4142

Çizelge 8.2 Örnek 8.2 nin çözümüne ait sonuçlar

Katsayı dizeyinin özellikleri

Elde edilen dizeyin önemli özellikleri vardır. Bu özellikler kullanılarak dizeydeki katsayıların hesaplanmasında işlemler en aza indirilir.

1. N/2 (=4/2=2) de yani F_2 de katlanma oluşur.
2. Katlanma eksenindeki katsayıların hepsi 1 dir ve toplamları sıfır olmak zorundadır.
3. Kullanılan dizeyin özelliğinden (N=4 için) (8.18) dizeyinin katsayıları bu problem için aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^{0(0,0)} & W^{0(0,1)} & W^{0(0,2)} & W^{0(0,3)} \\ W^{0(1,0)} & W^{1(1,1)} & W^{2(1,2)} & W^{3(1,3)} \\ W^{0(2,0)} & W^{2(2,1)} & W^{4(2,2)} & W^{6(2,3)} \\ W^{0(3,0)} & W^{3(3,1)} & W^{6(3,2)} & W^{1(3,3)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

W^0=1 olduğundan daima 0. satır ve 0. kolonun tüm değerleri 1 dir. Katlanma ekseni üzerindeki ilk katsayılar da +1 olmak zorundadır [$W^{0(1,0)}$=1, $W^{0(0,2)}$=1]. Bu nedenle yalnızca $W^{1(1,1)}$ katsayısı (-j) hesaplanarak tüm katsayılar dizeyi şekildeki atamalar yapılarak bulunabilir. Yani $W^{1(1,1)}$=-j

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & j \end{bmatrix}$$

Bu dizeyin 0. kolon ve satırının tüm değerleri 1 olmak zorundadır. Gösterilen eksenler de katlanma eksenleri olduğundan kat sayı dizeyi kolaylıkla yazılır.

Not: Konjuge olanlar katlanırken -1 ile çarpılır.

4. Eğer N=6 olsa idi;

N/2 = 6/2 = 3

n=3 kolon ve satırına göre katlanacaktır. O zaman katsayı dizeyi aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & W^{1(1,1)} & W^{2(1,2)} & -1 & \overline{-W^{2}} & \overline{-W^{1}} \\
1 & W^{2(2,1)} & W^{4(2,2)} & 1 & W^{4} & W^{4} \\
-1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & \overline{-W^{2(2,1)}} & W^{4(2,2)} & -1 & W^{4(2,2)} & -W^{2} \\
1 & \overline{-W^{1(1,1)}} & W^{2(1,1)} & -1 & \overline{-W^{21}} & W^{1(1,1)}
\end{bmatrix}
$$

Not: $\overline{W}$ eşleniği gösterir. $(a + jb)^{*} = (a - jb)$ dir.

Örnek 8.3

Şekil 8.10 da verilen dalgacığın HAFD bulunuz.

$K = 16$, $N = 16$, $T = 16$ dır. $\Delta T = T / K = 1$

Bu dalgacığın analitik bağıntısı ise

$$f(t) = (32 / \pi^{2})[\sin(wt) - (1 / 3^{2})\sin(3wt) + (1 / 5^{2})\sin(5wt) - ....]$$ dır.

1. (8.16) bağıntısından yararlanarak L=nk dan W^{L} değerleri saptanır. Elde edilen değerler karmaşık ortamda çizilerek karmaşık kökler bulunur.
2. (8.18) dizeyi oluşturulur.
3. Frekans ortamındaki örnekleme aralığı ve frekans adımları hesaplanır.

$$\Delta w = \frac{2\pi}{N}\frac{T}{K} = \frac{2\pi}{16} = 0.392699$$

$$w_{.i} = i\,\Delta w \qquad i = 0,1,2,............,n$$

$$w_{0} = 0$$

$$w_{1} = 0.3927$$

$$w_{2} = 2\,.\,0.3927 = 0.7854$$

Not: W ile w_i lerin farklı olduğuna dikkat ediniz.

4. (8.9) bağıntısında

$$F(w_{n}) = F_{n} = a_{n} + jb_{n}$$

yazılırsa

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n} + jb_{n})e^{jw_{n}t}$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n} + jb_{n})[\cos(w_{n}t) + j\sin(w_{n}t)]$$

elde edilir. Bu bağıntı aşağıdaki şekilde de yazılabilir.

$$f(t) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cos(w_n t) + b_n \sin(w_n t)$$

Zaman adımları	**Zaman T**	**İşlev f(t)**
0	0	0
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	3
6	6	2
7	7	1
8	8	0
9	9	-1
10	10	-2
11	11	-3
12	12	-4
13	13	-3
14	14	-2
15	15	-1

Çizelge 8.3 Örnek 3'ün ayrık değerleri

Frekans adım (n)	w	a_n	b_n	$\lvert F \rvert$
0	0	0	0	0
1	0.3927	0	-4.1817	-4.1817
2	0.7854	0	0	0
3	1.1781	0	0.5156	0.5156
4	1.5708	0	0	0
5	1.9635	0	-0.2302	-0.2302
6	2.3562	0	0	0
7	2.7489	0	0.1655	0.1655
8	3.1416	0	0	0
9	3.5343	0	0.1655	0.1655
10	3.2970	0	0	0
11	4.3197	0	0.2302	0.2302
12	4.7124	0	0	0
13	5.1051	0	-0.5156	-0.5156
14	5.4978	0	0	0
15	5.8905	0	4.1817	4.1817

Çizelge 8.4 Örnek 3'ün çözümüne ait sonuçlar

Üstte yazılan FS bağıntısı kullanılarak,

$$f(t) = \Delta w\{(a_0 + jb_0)[\cos(w_0t) + \sin(w_0t)] + (a_1 + jb_1)[\cos(w_1t) + \sin(w_1t)]$$
$$+ (a_2 + jb_2)[\cos(w_2t) + \sin(w_2t)] + ...\}$$

a_n ve b_n F_n, elemanının gerçel ve sanal kısımlarıdır. Sayısal sinyal Çizelge 8.3 te ve onun HAFD Çizelge 8.4 te verilmektedir.

Yöntemin başarısını araştırmak amacı ile Çizelge 8.3 te elde edilen F(w) değeri ve (8.9) bağıntısı kullanılarak zaman ortamındaki işlev yeniden bulunup ilk işlev ile karşılaştırılır.

$$f(t) = 0.3927\{(-4.1817j)[\cos(w_1t) + j\sin(w_1t)] + (0.5156j)[\cos(w_3t) + \sin(w_3t)]$$
$$+ (-0.2302j)[\cos(w_5t) + \sin(w_5t)] + (0.1655j)[\cos(w_7t) + \sin(w_7t)]\}$$
$$+ 0.3927\{(-0.1655j)[\cos(w_9t) + \sin(w_9t)] + (0.2302j)[\cos(w_{11}t) + \sin(w_{11}t)] + ...\}$$

Bu bağıntıda w_{15}=-w_1, w_{13}=-w_3, w_{11} =-w_5 konursa

$$f(t) = 3.2842\sin(w_1t) - 0.4050\sin(w_3t) + 01808\sin(w_5t) - ....$$

elde edilir. Elde edilen işlev Örnek 8.2 nin başında verilen işlevden fazla farklı değildir. Bu nedenle çözüm kabul edilebilir.

Ödevler

1. Çizelge 8.4 ü elde etmek için katsayı dizeyini kurunuz, gerekli çözümleri yapınız.
2. Örnek 8.1 de spektrum ortamında elde edilen F(m)=6,-1-j,0,-1+j sinyalinin zaman ortamındaki sayısal değerlerini bulunuz.
