BÖLÜM 7

JEOFİZİKTE ÇOK KULLANILAN BAZI DÖNÜŞÜMLER

7.1 ÇOK BOYUTLU FOURİER DÖNÜŞÜMÜ

$$\begin{aligned} F(w_1, w_{2,}..........., w_n) &= \Im[f(x_1, x_2, ..., x_n)] \\ f(x_1, x_2, ..., x_n) &= \Im^{-1}[F(w_1, w_{2,}..........., w_n)] \end{aligned} \qquad (7.1)$$

olarak gösterilirse,

$$F(w_1, w_{2,}..........., w_n) \leftarrow \Im \rightarrow f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

çok boyutlu FD leri, simgesel olarak, (7.1) denklemleri ile gösterilmiştir. "n" boyutlu FD çifti ise:

$$\begin{aligned} F(w_1, w_{2,}..........., w_n) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, ..., x_n) e^{-j2\pi(x_1w_1 + x_2w_2 + ... + x_nw_n)} dx_1 dx_2 ......dx_n \\ f(x_1, x_2, ..., x_n) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(w_1, w_{2,}..........., w_n) e^{j2\pi(x_1w_1 + x_2w_2 + ... + x_nw_n)} dw_1 dw_2 ......dw_n \end{aligned} \qquad (7.2)$$

bağıntıları ile verilir.

Jeofizikte; iki ve üç boyutlu FD leri kullanılır. Üç boyutlu FD lerinden genellikle depremlerde kullanılan sismik ağların tepki işlevinin hesaplanmasında yararlanılır (Ayrıntılı bilgi için Bkz Spektral Analiz ve Uygulamaları Bölüm 10).

Üç boyutlu FD leri aşağıdaki çift ile verilir.

$$\begin{aligned} F(u, v, w) &= \Im[f(x, y, z)] \\ f(x, y, z) &= \Im^{-1}[F(u, v, w)] \end{aligned} \qquad (7.3)$$

$$\begin{aligned} F(u, v, w) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) e^{-j2\pi(ux + vy + wz)} dx\, dy\, dz \\ f(x, y, z) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u, v, w) e^{j2\pi(ux + vy + wz)} du\, dv\, dz \end{aligned} \qquad (7.4)$$

İki boyutlu FD lerinin jeofizikte uygulaması oldukça çok yer tutar. Özellikle potansiyel alan verilerine uygulanarak veri işlem yöntemlerinde (süzgeçleme, analitik uzanımlar, türev yöntemleri, güç spektrumu vd.) tümüyle iki boyutlu FD lerinden yararlanılır. Ayrıca iki boyutlu pencerelerin (Bkz Bölüm 10) spektrumlarının hesaplanmasında iki boyutlu FD leri kullanılır. Zaman serileri için kullanılan tüm kurallar uzay serileri için de geçerlidir. Ancak ortam değişikliği nedeniyle kullanılan birimler farklılık gösterir. Her iki ortama ait birimler Şekil 7.1 de verilmektedir.

7.1.1 Zaman ve uzay ortamı temel tanımları

İki boyutlu FD

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dx\,dy$$
$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)\,e^{j2\pi(ux+vy)}du\,dv \qquad (7.5)$$

bağıntıları ile verilir.

(7.5) bağıntıları ayrık olarak yazılırsa;

$$\hat{F}(k_1,k_2)=\sum_{n_1=0}^{M-1}\sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1,n_2)\,e^{-j2\pi(k_1n_1/M+k_2n_2/N)}$$
$$\hat{f}(n_1,n_2)=\frac{1}{MN}\sum_{k_1=0}^{M-1}\sum_{k_2=0}^{N-1} F(k_1,k_2)\,e^{j2\pi(k_1n_1/M+k_2n_2/N)} \qquad (7.6)$$

(7.6) bağıntısında:
k_1 , k_2 : Frekans ortamı sayıcısı.
n_1 , n_2 : Zaman ortamı sayıcısı.
k_1 , n_1 : 0 , 1 , 2 ,......., M-1.
k_2 , n_2 : 0 , 1 , 2 ,......., N-1.
M : x ekseni boyunca ayrık veri sayısı.
N : y ekseni boyunca ayrık veri sayısı.

(7.5) bağıntısındaki f(x,y) veya (7.6) bağıntısındaki $f(n_1,n_2)$ işlevi potansiyel alanlarda x ve y eksenlerine göre çifttirler. Bu nedenle FD nde sinüs içeren terimler ortadan kalkar.

$$F(u,v)=4\int_0^X\int_0^Y f(x,y)\cos(2\pi ux)\cos(2\pi vy)\,dx\,dy \qquad (7.7)$$

ayrık olarak ise:

$$\hat{F}(u,v)=4\sum_{n_1=0}^{Y}\sum_{n_2=0}^{X} f(n_1,n_2)\cos(2\pi n_1 v)\cos(2\pi n_2 u) \qquad (7.8)$$

yazılabilir.

İki boyutlu FD nün özellikleri Çizelge 7.1 de ve bazı basit işlevler ile onların FD leri de Şekil 7.2 de verilmektedir.

7.2 HANKEL DÖNÜŞÜMLERİ

İki boyutlu, tekdüze bir ortamda, bir noktadan düzleme yayılan dalgalar dairesel bakışım gösterirler. Potansiyel alanlarda olay böyledir. Örneğin yer içindeki küresel bir cismin gravite alanı da dairesel bakışıktır. Bilindiği gibi Dean(1958), potansiyel alanlarda uygulanan çeşitli yöntemlerin (analitik uzanımlar, türev yöntemleri, vd.) birer süzgeçleme işlemi olduğunu göstermiştir. Bunların frekans tepkileri ise iki boyutlu FD çifti ile hesaplanır. Ama, yalnızca FD ile hesaplanan süzgeçte, süzgece giren ve çıkan verilerde istenmeyen bir dizi olay oluşmaktadır. Bu olayların ilk nedeni de kullanılan frekans tepki işlevinin dairesel bakışık olmamasıdır. Bu nedenle süzgeç katsayılarının (ağırlık işlevi) dairesel bakışık olması gerekir. Bu amaçla süzgeç işlevi bulunurken yalnızca FD çiftini kullanmak yerine dairesel bakışıma sahip Fourier-Bessel dönüşümü yapılır.

Süzgeç işlevinin dairesel bakışık olmasının bir başka yararı, 45° doğrultusunda yapay olarak oluşan anomali uzamalarının görülmemesidir (Şekil 7.3). Dairesel bakışık olan bir süzgecin tüm doğrultulardaki süzgeçleme etkisi aynıdır. Matematiksel olarak,

$$f(x,y) = f\left[\left(x^2 + y^2\right)^{1/2}\right] = f(r) \tag{7.9}$$

yazılabilir. Bu durumda frekans tepki işlevinin yalnızca "k" dairesel frekansının işlevi olması gerekir. Yani;

$$F(u,v) = F\left[\left(u^2 + v^2\right)^{1/2}\right] = F(k) \tag{7.10}$$

(7.9) bağıntısı geçerli ise FD işlevi aşağıdaki gibi yazılır.

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x^2 + y^2\right)^{1/2} e^{-j2\pi(ux+vy)} dx\, dy \tag{7.11}$$

Kullanılan dik koordinat sistemi kutupsal koordinatlara çevrilirse:

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) \quad , \quad y = r\sin(\theta) \quad , \quad r = \left(x^2 + y^2\right)^{1/2'} \\ u &= k\cos(\phi) \quad , \quad v = k\sin(\phi) \quad , \quad k = \left(u^2 + v^2\right)^{1/2} \end{aligned} \tag{7.12}$$

(7.12) bağıntıları kullanılarak (7.11) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$F(k,\phi) = \int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{2\pi} f(r) e^{-j2\pi kr[\cos(\theta)\cos(\phi)+\sin(\theta)\sin(\phi)]}\, r\, dr\, d\theta \tag{7.13}$$

Bilindiği gibi $\cos(\theta - \phi) = \cos(\theta)\cos(\phi) + \sin(\theta)\sin(\phi)$ dir.

$$F(k,\phi) = \int_{r=0}^{\infty} r f(r) dr \int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-j2\pi kr[\cos(\theta-\phi)]}\, d\theta \tag{7.14}$$

(7.14) ü daha kısa yazmak için Bessel işlevinden yararlanılır. Bilindiği gibi,

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{[-jz\cos(\alpha)]}\,d\alpha \qquad (7.15)$$

dır. (7.15) bağıntısında $\alpha = \theta - \phi$ dır.

$$2\pi\,J_0(z) = \int_0^{2\pi} e^{[-jz\cos(\theta-\phi)]}\,d\theta \qquad (7.16)$$

ve $z = 2k\pi r$ konarak,

$$2\pi\,J_0(2k\pi r) = \int_0^{2\pi} e^{[-j2k\pi r\cos(\theta-\phi)]}\,d\theta \qquad (7.17)$$

elde edilir. (7.17) bağıntısı, (7.14) teki ikinci tümlevdir. Dolayısı ile (7.14):

$$F(k,\phi) = 2\pi\int_{r=0}^{\infty} r\,f(r)\,J_0(2\pi kr)\,dr \qquad (7.18)$$

haline gelir. (7.18) eşitliğinin ikinci tarafı "ϕ" açısını içermektedir. Ancak "ϕ" açısı değişken değildir. Bu durumda dürtü tepki işlevi dairesel bakışıma sahip olunca frekans tepki işlevi de dairesel bakışıma sahip olacaktır.

TFD den başlayarak aynı işlem sırası ile uygulanırsa dürtü tepki işlevi için de benzer bir bağıntı elde edilir. Bu duruma göre aşağıdaki dönüşüm çifti yazılabilir.

$$\begin{aligned} F(k) &= 2\pi\int_0^{\infty} r\,f(r)\,J_0(2\pi kr)\,dr \\ f(r) &= 2\pi\int_0^{\infty} k\,F(k)\,J_0(2\pi kr)\,dk \end{aligned} \qquad (7.19)$$

(7.19) bağıntıları **"sıfırıncı dereceden HANKEL DÖNÜŞÜM çifti"** olarak bilinir. Bunlardan birincisi, sıfırıncı dereceden normal Hankel dönüşümü, ikincisi de sıfırıncı dereceden ters Hankel dönüşümüdür. (7.19) bağıntısında F(k), süzgecin çap doğrultusundaki dalgasayısı tepki işlevi ve f(r) de çap doğrultusundaki dürtü tepki işlevidir. Eğer bunlardan herhangi biri bilinirse diğeri de bulunur.

Hankel dönüşümü kullanılarak süzgeç düzenlenebilir. Bu durumda, "k" süzgecin kesme dalgasayısı olmak üzere süzgecin dalgasayısı tepki işlevi

$$F(k) = \begin{bmatrix} 1 & , & |k| \le k_1 \\ 0 & , & |k| > k_1 \end{bmatrix} \qquad (7.20)$$

olarak tanımlanabilir. Buna göre,

$$f(r) = 2\pi \int_0^{k_1} J_0(2\pi kr)\, k\, dk$$
$$f(r) = k_1\, J_1(2\pi k_1 r)/r \qquad (7.21)$$

dır. (7.21) yardımıyla süzgeç katsayıları hesaplanabilir (Lavin ve Devanne 1970). Bu tür süzgeçleme, Ege Bölgesi havadan manyetik verilerine Sanver(1974) tarafından uygulanmıştır.

İki boyutlu FD lerine ait özellikler kolaylıkla Hankel dönüşümlerine de uygulanabilirler (Çizelge 7.2). Bunlardan kayma özelliği dışında verilen özellikler ile iki boyutlu FD lerine ait Çizelge 7.1 de verilen özellikler aynıdır.

Sıfırıncı mertebeden bazı Hankel dönüşümleri iki boyutlu FD olarak Şekil 7.4 te verilmektedir.

Özellik	**f(x,y)**	**F(u,v)**
Ölçekleme	$f(ax, by)$	$\frac{1}{\lvert ab \rvert} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)$
Doğrusallık	$f(x, y) + g(x, y)$	$F(u, v) + G(u, v)$
Kayma	$f(x - a, y - b)$	$e^{-j2\pi(au+bv)} F(u, v)$
Parseval kuramı	$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert f(x, y) \rvert^2 dx\, dy = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert F(u, v) \rvert^2 du\, dv$	
Evrişim	$f(x, y) * g(x, y) = F(u, v) . G(u, v)$	
Özilişki	$C_{xx}(\tau_1, \tau_2) = \lvert F(u, v) \rvert^2$	

Çizelge 7.1 İki boyutlu Fourier dönüşümünün özellikleri

Ölçekleme	**f(r)**	**F(k)**
Ölçekleme	$f(ar)$	$a^{-2} F(k/a)$
Toplama	$f(r) + g(r)$	$F(k) + G(k)$
Kayma	Orijinin kayması dairesel bakışımı yok eder	
Parseval	$\int_0^{\infty} r \lvert f(r) \rvert^2 dr$	$\int_0^{\infty} k \lvert F(k) \rvert^2 dk$
Evrişim	$f(r) * g(r) = F(w) . G(w)$	

Çizelge 7.2 Hankel dönüşümü özellikleri

7.3 HİLBERT DÖNÜŞÜMLERİ

Hilbert dönüşümlerinin (HD) anlaşılabilmesi için, öncelikle, analitik sinyal ve tek yanlı (causal) işlevlerin tanımı yapılmalıdır.

7.3.1 Analitik sinyal

Gerçel bir f(t) işlevinin FD $F(w)=\Im[f(t)]$dır. Söz konusu f(t) işlevi, (5.17) bağıntısına uygun olarak gerçel ve sanal bileşenlerin bir toplamı olarak yazılır.

$$F(w) = \text{Ger}[F(w)] + j\,\text{San}[F(w)]$$

veya kısaca

$$F(w) = G(w) + j\,S(w)$$

dır. Bu aşamada,

$$\hat{F}(w) = \Im\left[\hat{f}(t)\right]$$
$$\hat{f}(t) \leftarrow H \rightarrow f(t) \qquad (7.22)$$

sinyali tanımlanabilir. Bu izin FD ve TFD polar kkoordinatlarda

---

Not:
Bu bölümdeki "^" işaretinin, Bölüm 7.11 ve 8 deki aynı işaretle bir ilgisi yoktur. 7.11 ve 8. bölümde ayrık sinyali, burada ise analitik sinyali göstermektedir.

$$\hat{F}(w) = \left|\hat{f}(t)\right| e^{jw_0 t} \qquad (7.23a)$$

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(w) e^{jw_0 t} \qquad (7.23b)$$

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \left[G(w)\cos(wt) + \hat{S}(w)\sin(wt)\right]dw \qquad (7.23c)$$

olarak gösterilir. Burada, $\hat{F}(w)$ve F(w) arasında

$$\hat{F}(w) = -j\,\text{sgn}(w)F(w) \qquad (7.24)$$

ilişkisi vardır. f(t) ve $\hat{f}(t)$ birlikte kullanılarak, yeni bir sinyal oluşturulur. Bu sinyal ve bileşenleri Şekil 7.5 te verilmektedir.

$$f_+(t) = f(t) + j\hat{f}(t) \qquad (7.25)$$

Şekil 7.5 te ve (7.25) denklemiyle gösterilen $f_+(t)$ izine **"ANALİTİK SİNYAL"** denir. Şekil ve denklemden de anlaşılacağı gibi

$\hat{f}(t) = \mathrm{San}[f_+(t)]$, $f(t) = \mathrm{Ger}[f_+(t)]$, $f(t) = H[f(t)]$

dır. Dolayısıyla bu sinyalin genlik ve evresi

$$A(t) = \left[f^2(t) + \hat{f}^2(t) \right] = \left\{ \mathrm{Ger}[f_+(t)]^2 + \mathrm{San}[f_+(t)]^2 \right\}^{1/2} \qquad (7.26a)$$

$$\phi(t) = \tan^{-1}\left(\frac{\hat{f}(t)}{f(t)} \right) \qquad (7.26b)$$

olarak tanımlanır. Özel olarak (7.26a) denklemi, aynı zamanda o izin zarfını verir (Şekil 7.6).

(7.23a) denklemindeki gibi, bir işlevin "t" ortamında e^{jw_0t} ile çarpılması, onun frekans ortamında w_0 kadar ötelenmesine neden olur. Ayrıca gerçel bir işlevin spektrumunun çift yan bantlı olduğu bilinir. Yani spektrum w'nın "-" ve "+" frekanslarında görülür. Oysa analitik izin spektrumu yalnızca "+" eksende w_0 kadar ötelenir (Şekil 7.7).

Spektrumun yanlızca "+" bantta görülmesi spektrumdaki bakışımı ortadan kaldırır. Dolayısı ile analitik sinyalin indisi olarak "+" kullanılmıştır. Yani $\Im[f_+(t)] = F_+(t)$ dir ve $F_+(w)$ ile F(w) arasında

$$F_+(w) = 2\,F(w)U(w) \quad \begin{cases} 2\,F(w) & w > 0 \\ F(0) & w = 0 \\ 0 & w < 0 \end{cases} \qquad (7.27)$$

Not: Tek ve çift işlevlerin özelliklerinden yararlanılarak

$$G(w) = \frac{1}{2}[F(w) + F(-w)]$$

$$S(w) = \frac{1}{2j}[F(w) - F(-w)]$$

yazılır.

Analitik bir sinyalin HD, onun kuadratik işlevini verir (Bracewell 1984, s. 269). Örneğin cos(t) izinin kuadratiği -sin(t) dir ve cos(t) işlevine uygun olarak analitik sinyal

$$f_+(t) = \cos(w_0 t) + j\sin(w_0 t) = e^{jw_0 t} \qquad (7.28)$$

dir (Şekil 7.8).

7.3.2 Tek yanlı (causal) işlevler

Bir f(t) işlevinin FD [(5.17) bağıntısı]

$$F(w) = \Im[f(t)]$$
$$F(w) = G(w) + j\,S(w)$$

olarak tanımlanır. Buradaki f(t) işlevi tek yanlı ise f(t) işlevi, G(w) ve S(w) nın ayrı ayrı terimleri olarak gösterilir.

Tek yanlı bir işlev

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 \qquad t < 0 \\ f(-t) &= 0 \qquad t > 0 \end{aligned} \tag{7.29}$$

olarak tanımlanır. Bu olay doğrudan doğruya bizi tek ve çift işlevlerin tanımına götürür.

Not:
$f(t) = 2f_ç(t) = 2f_t(t)$ $t > 0$ için f(t) işlevi tek ve çift bileşenlerin bir toplamı olarak yazılır (Bkz. Bölüm 5.3.4.e).

$$f(t) = f_ç(t) + f_t(t)$$

Kuşkusuz ki burada (5.33) denklemleri geçerlidir ve bu denklemlerden yararlanarak

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty G(w)\cos(wt)\,dw \;\hat{=}\; -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty S(w)\sin(wt)\,dw \tag{7.30}$$

yazılabilir.

7.3.3 Tek yanlılık ve HD

Tek yanlı bir f(t) işlevinin FD

$$F(w) = \Im[f(t)] = G(w) + j\,S(w)$$

olarak verilir. Böyle bir işlevin gerçel ve sanal bileşenleri doğrudan doğruya HD çifti oluştururlar.

Bölüm 5.3.4.e den tek ve çift işlevlerin özellikleri kullanılarak

$$f(t) = f_ç(t) + f_t(t)$$

yazılır. Eğer f(t) işlevi tek yanlı ise,

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 \qquad\qquad t < 0 \\ f_ç(t) &= -f_t(t) \qquad t > 0 \end{aligned} \tag{7.31}$$

dır. O zaman

$$f(t) = 2f_ç(t) = 2f_t(t) \qquad t > 0 \tag{7.32}$$

elde edilir. Bu nedenle

$$f_ç(t) = f_t(t)\operatorname{sgn}(t) \tag{7.33}$$

$$f_t(t) = f_ç(t)\operatorname{sgn}(t) \tag{7.34}$$

ve (5.38) tanımından yararlanılarak signum işlevi de

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

bağıntısı yardımıyla tanımlanır. (5.33b) ve (5.34) denklemlerinin birlikte kullanılması ile

$$G(w) = \Im[f_ç(t)] \tag{7.35}$$

$$jS(w) = \Im[f_t(t)] \tag{7.36}$$

elde edilir. Bölüm 5 teki Örnek 5.6 nın çözümü de

$$\Im[\operatorname{sgn}(t)] = \frac{2}{jw}$$

dır. Ayrıca frekans evrişim kuramı da (5.58) denklemiyle verilmektedir.

$$\Im[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi}F_1(w) * F_2(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)F_2(w-u)du$$

(7.33) denkleminin FD

$$G(w) = \Im[f_ç(t)] = \Im[f_t(t)\operatorname{sgn}(t)] \tag{7.37}$$

olarak bulunur. (7.37) denkleminde

$$f_1(t) = f_+(t) \quad , \quad f_2(t) = \operatorname{sgn}(t)$$

alınarak (5.58) e benzetilir ve (7.36) kullanılarak

$$G(w) = \frac{1}{2\pi} jS(w) * \frac{2}{jw} = \frac{1}{\pi} S(w) * \frac{1}{w} \tag{7.38}$$

elde edilir. (7.38) de

$$F_1(w) = S(u) \quad , \quad F_2(w) = \frac{1}{w}$$

olarak alınır ve frekans evrişim kuramından yararlanılırsa,

$$G(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(u)\frac{1}{w-u}du$$

$$G(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(u)}{w-u}du \qquad (7.39)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$jS(w)=\Im[f_t(t)]=\Im[f_ç(t)\mathrm{sgn}(t)] \qquad (7.40)$$

$$jS(w)=\frac{1}{2\pi}G(w)*\frac{2}{jw} \qquad (7.41)$$

$$S(w)=-\frac{1}{\pi}G(w)*\frac{1}{w} \qquad (7.42)$$

elde edilir. Yine frekans evrişim kuramından

$$F_1(w)=G(u) \quad , \quad F_2(w)=\frac{1}{w}$$

$$S(w)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(u)}{w-u}du \qquad (7.43)$$

elde edilir. (7.39) ve (7.43) denklemleri HD olarak bilinir. Gerçel ve sanal bileşenlerinin "w" ortamındaki HD denklemlerinde u=w değerinde (7.39) ve (7.43) denklemleri ıraksaktır. Bu tümlevlerin çözümünde Cauchy ve Residue kuramları kullanılır [Bkz. (7.67)].

7.3.4 Hilbert dönüşüm süzgecinin tanımı

Herhangi bir f(t) izinin, dönüşüm işlevi

$$H(e^{jw})=\begin{cases} -j & 0\le w<\pi \\ j & \pi\le w<2\pi \end{cases} \qquad (7.44a)$$

denklemi ile verilen bir süzgeçten geçirildiğini varsayalım. (7.44a) denklemi ile verilen süzgeç, tek bağımsız değişkenli HD süzgeci olarak isimlendirilir.

Bu süzgeç tümüyle analitik sinyal kurallarına uyar ve (7.27) denklemini sağlar. Sözkonusu süzgecin zaman ortamı ifadesi

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} -je^{jw_n t}\,dw+\int_{0}^{\pi} je^{jw_n t}\,dw$$

$$h(t)=\begin{cases} \dfrac{1-e^{j\pi t}}{\pi t} & t\neq 0 \\ 0 & t=0 \end{cases} \qquad (7.44b)$$

$$h(t)=\begin{cases}\dfrac{2\sin^2(\pi t/2)}{\pi t} & t\neq 0\\ 0 & t=0\end{cases}\tag{7.44c}$$

dır. (7.44c) denklemi, ayrık olarak

$$h(t)=\begin{cases}\dfrac{2\sin^2(\pi L/2)}{\pi L} & L\neq 0\\ 0 & L=0\end{cases}\tag{7.44d}$$

şeklinde yazılır. h(L) işleci Şekil 7.9 da ve normalleştirilmiş h(L) işleci (Bkz Bölüm 7.3.6) ise (Rabiner ve Gold 1975) Şekil 7.10 da verilmektedir.

İdeal bir HD süzgeci (Şekil 7.11) ile genlik ve evre spektrumları Şekil 7.12 de verilmektedir. Şekil 7.12 incelendiğinde, süzgecin asıl sinyalin genliğini değiştirmediği, ancak her frekans bileşenine π/2 radyanlık bir kayma verdiği anlaşılmaktadır (Bkz. Bölüm 7.3.1). Söz konusu işlecin "x" ve "w" ortamlarındaki gerçel ve sanal eksendeki durumları ise Şekil 7.13 te görülmektedir.

7.3.5 HD ait matematiksel bağıntılar

Herhangi bir işlev tek ve çift bileşenlerin toplamı olarak yazılabilir (Lee 1967).

$$f(x)=f_ç(x)+f_t(x)\tag{7.45}$$
$$f_ç(x)=1/2[f(x)+f(-x)]\tag{7.46}$$
$$f_t(x)=1/2[f(x)-f(-x)]\tag{7.47}$$
$$k(x)=\begin{bmatrix}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{bmatrix}$$
$$f_ç(x)=k(x)f_t(x)$$
$$f(x)\leftarrow\Im\rightarrow F(w)$$
$$F(w)=\Im[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-jwx}\,dx\tag{7.48}$$
$$f(x)=\Im^{-1}[F(w)]=\int_{-\infty}^{\infty}F(w)e^{jwx}\,dw\tag{7.49}$$
$$F(w)=\int_{-\infty}^{\infty}[f_ç(x)+f_t(x)]e^{-jwx}\,dx\tag{7.50}$$

İlk önce Euler bağıntısı, daha sonrada tek işlevlerin FD özellikleri kullanılarak;

$$F(w)=\int_{-\infty}^{\infty}f_ç(x)\cos(wx)dx-j\int_{-\infty}^{\infty}f_t(x)\sin(wx)dx\tag{7.51}$$

elde edilir. Bu bağıntıda birinci tümlev çift işlevin, ikincisi ise tek işlevin FD dür. Yani, g(x) işlevinin çift kısmı spektrumda gerçel bileşene, tek kısmı ise sanal bileşene karşıt gelmektedir.

$$F_ç(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f_ç(x)\cos(wx)dx \tag{7.52}$$

$$F_t(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f_t(x)\sin(wx)dx \tag{7.53}$$

$$F_ç(w) \leftarrow \Im \rightarrow f_ç(x) \tag{7.54}$$

$$F_t(w) \leftarrow \Im \rightarrow f_t(x) \tag{7.55}$$

$$f_ç(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_ç(w)\cos(wx)dx \tag{7.56}$$

$$f_t(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_t(w)\sin(wx)dx \tag{7.57}$$

Bu bağıntılarda:

$F_ç(w)$: F(w) işlevinin gerçel kısmı [Ger F(w)].
$F_t(w)$: F(w) işlevinin sanal kısmıdır [San F(w)].

(7.56) nın kosinüs dönüşümü alınırsa;

$$F_ç(w) = \Im[f_ç(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_ç(x)\cos(wx)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(wx)dx.\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_ç(w)\cos(wx)dx\right] \tag{7.58}$$

elde edilir. w=2πu dönüşümü yapılarak (açısal frekans çizgisel frekans cinsinden yazılırsa) ve çift işlevlerin özelliklerinden,

$$F_ç(w) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \cos(wx)dx.\int_0^{\infty} F_t(u)\sin(ux)du \tag{7.59}$$

elde edilir. Benzer yol ile (7.56) denkleminin sinüs dönüşümü alınarak $F_t(w)$ işlevi bulunur (Pınar 1983).

$$F_t(w) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \sin(wx)dx.\int_0^{\infty} F_ç(u)\sin(ux)du \tag{7.60}$$

Son iki denklem doğrusal dizgede "Hilbert Dönüşüm Çifti" olarak bilinir.

Buraya dek anlatılanların tümü uzunluk ortamında bir bağıntı ile gösterilmek istenirse (7.56) ve (7.57) bağıntıları (7.45) te yerine konulmalıdır.

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[F_ç(w)\cos(wx)-F_t(w)\sin(wx)\right]dw \tag{7.61}$$

(7.61) bağıntısı;

$$\lim_{s\to 0} f(x,s)=f(x)\lim_{s\to 0}(1/\pi)\int_{0}^{\infty}\left[F_ç(w)\cos(wx)+F_t(w)\sin(wx)\right]e^{sw}dw \tag{7.62}$$

şeklinde yazılabilir (Thomas 1969). "s" nin limitte sıfıra gitmesinde ise,

$$\hat{f}(x)=h(x,0)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[F_t(w)\cos(wx)+F_ç(w)\sin(wx)\right]dw \tag{7.63a}$$

veya

$$F_t(w)=\text{San}\,F(w)$$
$$F_ç(w)=\text{Ger}\,F(w)$$

konarak,

$$\hat{f}(x)=h(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\text{San}\,F(w)\cos(wx)+\text{Ger}\,F(w)\sin(wx)\right]dw \tag{7.63b}$$

konumunu alır. Son eşitlik $f_1(x)$ sanal işlevi veya f(x) işlevinin HD olarak bilinir. Jeofizikte ayrık izlerle uğraşıldığından son bağıntı ayrık olarak gösterilebilir.

$$f(k,\Delta x)=\frac{1}{\pi}\left[\sum_{n=0}^{(N/2)-1}\text{San}\,F(nw_0)\cos(nw_0k\Delta x)+\sum_{n=0}^{(N/2)-1}\text{Ger}\,F(nw_0)\sin(nw_0k\Delta x)\right] \tag{7.64}$$

(7.64) bağıntısında F(w) nın gerçel bileşeni;

$$\text{Ger}\,F(nw_0)=\sum_{k=0}^{N-1}f(k,\Delta x)\cos(nw_0k\Delta x) \tag{7.65}$$

F(w) işlevinin sanal bileşeni ise:

$$\text{San}\,F(nw_0)=\sum_{k=0}^{N-1}f(k,\Delta x)\sin(nw_0k\Delta x) \tag{7.66}$$

dır (Mohan ve diğ. 1982). Bu bağıntılarda:

N : Veri sayısı.
k : Zaman ortamı sayacı.
n : Frekans ortamı sayacıdır.

7.3.6 Evrişim ile HD

Genel kuramı kısaca verilen "Hilbert dönüşümleri" evrişim yolu ile de yapılabilir.

Herhangi bir f(x) işlevinin HD (Bracewell 1986):

$$G_{Hi}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x')}{x'-x}\,dx' \qquad (7.67)$$

-ì

dır. Bu bağıntı x=x'de ıraksaktır. Tümlevin çözümü için Cauchy ve rezidü kuramları kullanılır. (7.67) bağıntısından $G_{Hi}(x)$, f(x) in bir doğrusal işlevi olduğu görülmektedir. Gerçekten de $G_{Hi}(x)$ işlevi $(-\pi x)^{-1}$ ile işlevin evrişiminden elde edilir.

$$G_{Hi}(x) = (-\pi x)^{-1} * f(x) \qquad (7.68)$$

Bilindiği gibi $(-\pi x)^{-1}$ in FD signum işlevidir. Evrişim özelliklerinden yararlanılarak ters HD

$$f(x) = -(-\pi x)^{-1} * G_{Hi}(x) \qquad (7.69)$$

olarak verilir (Şekil 7.13a ve 7.13b).

Uygulamada, orijinal sinyalin evresi π/2 kadar ötelenir ve genlikleri de "-" işareti ile çarpılmış olarak elde edilir. Şekil 7.14a ve 7.14b de bir f(t) izinin genlik ve evre spektrumları izlenmektedir. Şekil 14c ve 14d de ise HD süzgecinden geçirildikten sonraki durumu görülmektedir. Görüldüğü gibi genlik spektrumu -1 ile çarpılmış ($|F(w)|$ olması nedeniyle + dır) ve evresi de π/2 kadar ötelenmiştir.

$(-\pi x)^{-1}$ işlevi normalleştirilebilir. Bu durumda

$$(-\pi x)^{-1} = x^{-1}\left[1 - e^{j\pi x}\right] \qquad (7.70)$$

elde (Şekil 7.10) edilir (Rabiner ve Gold 1975).

7.3.7 Potansiyel alanlarda Hilbert dönüşümlerinin kurulması

Birincil bileşenler arasındaki ilişki

Skaler bir M potansiyeli ve onun alan vektörü

$$B = \nabla M$$

denklemiyle verilir. Bilindiği gibi bu potansiyel, kaynaktan sonsuz uzakta, $\nabla^2 M = 0$ olması nedeniyle sıfıra yaklaşır. M potansiyelinin üç boyutlu olarak yönlü türevleri, o yönlerdeki bileşenlerini verir. Bu türevlerden düşey yöndeki ise gravitede, gravitenin düşey bileşenini veya kısaca çekim kuvvetini verir. Bunlara ait denklemler Nelson (1988) tarafından verilmiştir.

$$g_x = \frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-\alpha)\partial M/\partial z}{\left[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2\right]^{3/2}}d\alpha\, d\beta \quad (7.71)$$

$$g_y = \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(y-\beta)\partial M/\partial z}{\left[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2\right]^{3/2}}d\alpha\, d\beta \quad (7.72)$$

$$g_z = \frac{\partial M}{\partial z} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-\alpha)\partial M/\partial\alpha+(y-\beta)\partial M/\partial\beta}{\left[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2\right]^{3/2}}d\alpha\, d\beta \quad (7.73)$$

son üç denklem potansiyel alanın birincil bileşenleri olarak adlandırılır ve onlarin FD ile aralarındaki ilişki ise Nabighian (1984) tarafından kurulmuştur.

a. İki boyutlu ortam (tek bağımsız değişken x)

$$\Im\left[\frac{\partial M}{\partial x}\right] = \Im[g_x] = j\,w\,\Im[M] \quad (7.74)$$

$$\Im\left[\frac{\partial M}{\partial z}\right] = \Im[g_z] = |w|\,\Im[M] \quad (7.75)$$

b. Üç boyutlu ortam (iki bağımsız değişken x, y)

$$\Im\left[\frac{\partial M}{\partial x}\right] = \Im[g_x] = j\,u\,\Im[M] \quad (7.76)$$

$$\Im\left[\frac{\partial M}{\partial y}\right] = \Im[g_y] = j\,v\,\Im[M] \quad (7.77)$$

$$\Im\left[\frac{\partial M}{\partial z}\right] = \Im[g_z] = \left(u^2+v^2\right)^{1/2}\Im[M] \quad (7.78)$$

Not: u ve v dalgasayısı ortamı bağımsız değişkenleridir.

İki boyutlu ortamda potansiyel işlevinin yatay ve düşey bileşenleri arasındaki ilişki HD ile kurulur.

$$-g_z(x) \leftarrow HD \rightarrow g_x(x) \quad (7.79a)$$

$$\Im[g_z(x)] = j\,\mathrm{sgn}(w)\,\Im[g_x(x)] \quad (7.79b)$$

(7.79) denklemlerinin Bölüm 7.3.1 de verilen analitik sinyal ile bağlantısı

$$\begin{aligned} g_z(x) &= f(t) = \mathrm{Ger}[g_c(x)] \\ g_x(x) &= \hat{f}(t) = \mathrm{San}[g_c(x)] \\ g_c(x) &= f_+(t) = g_z(x) + j\,g_x(x) \end{aligned} \quad (7.80)$$

dır (Şekil 7.5).

Üç boyutlu ortamda ise

$$\Im[g_x(x) + j\, g_z(x)] = [1 + \mathrm{sgn}(w)]\Im[g_x(x)] \tag{7.81}$$

olarak verilir.

Üç boyutlu işleçlerin hesaplanması için birçok yol vardır. Ancak bunlar içinde en kolay olanı aşağıda belirtilendir (Nabighian 1984).

$$\left(u^2 + v^2\right)^{1/2} = ju \frac{-ju}{\left(u^2 + v^2\right)^{1/2}} - jv \frac{-jv}{\left(u^2 + v^2\right)^{1/2}} \tag{7.82}$$

(7.82) denkleminin her iki tarafı $\Im[M]$ ile çarpılırsa

$$\left(u^2 + v^2\right)^{1/2} \Im[M] = ju \frac{-ju}{\left(u^2 + v^2\right)^{1/2}} \Im[M] - jv \frac{-jv}{\left(u^2 + v^2\right)^{1/2}} \Im[M] \tag{7.83}$$

son denklemde (7.76), (7.77) ve (7.78) kullanılırsa,

$$\Im[g_z] = \frac{-ju}{\left(u^2 + v^2\right)^{1/2}} \Im[g_x] - \frac{-jv}{\left(u^2 + v^2\right)^{1/2}} \Im[g_y] \tag{7.84}$$

ve v=0 alınarak iki boyutlu durum (tek bağımsız değişken) elde edilir.

$$\Im[g_z] = j \frac{w}{|w|} \Im[g_x] = -j\,\mathrm{sgn}(w)\Im[g_x] \tag{7.85}$$

(7.85) ve (7.80) denklemlerinin aynı noktaya geldiğine dikkat edilmelidir. (7.79), (7.80) ve (7.85) birlikte irdelenirse $g_z(x)$ in HD alınarak gx(x) elde edilebildiği gibi, (7.85) de kullanılarak HD alınabilir.

Eğer iki bağımsız değişkenli signum işlevi karmaşık ortamda bileşenlerine ayrılırsa (Şekil 7.15),

$$\mathrm{sgn}(u, v) = \frac{u}{\left(u^2 + v^2\right)^{1/2}} e_x + \frac{v}{\left(u^2 + v^2\right)^{1/2}} e_y \tag{7.86}$$

olarak yazılabilir. Burada e_x ve e_y, x ve y yönündeki birim vektörlerdir.

Üç boyutlu HD işleci ise;

$$H = j\,\mathrm{sgn}(u, v) = H_1 e_x + H_2 e_y \tag{7.87}$$

dır. Bu bağıntıda;

$$H_1 = -\frac{ju}{\left(u^2+v^2\right)^{1/2}}$$
$$H_2 = -\frac{jv}{\left(u^2+v^2\right)^{1/2}} \tag{7.88}$$

dir. O zaman (7.85),

$$\Im[g_z] = H_1\,\Im[g_x] + H_2\,\Im[g_y] \tag{7.89a}$$
$$\Im\left[\frac{\partial M}{\partial z}\right] = H_1\,\Im\left[\frac{\partial M}{\partial x}\right] + H_2\,\Im\left[\frac{\partial M}{\partial y}\right] \tag{7.89b}$$

şeklinde elde edilir. (7.88) ve (7.89) denklemleri üç boyutlu durumda HD işlecinin nasıl hesaplanacağını ve ne şekilde kullanılacağını gösterir.
(7.88) ile verilen işlecin uzay ortamı ifadesi ise

$$h_1(x,y) = \frac{1}{2\pi}\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} \tag{7.90a}$$
$$h_2(x,y) = \frac{1}{2\pi}\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} \tag{7.90b}$$

dir. Bunların uzay ve frekans ortamı görünümleri Şekil 7.16 ve 7.17 de verilmiştir.

İkincil bileşenler arasında HD nün kurulması

Analitik sinyal (7.25) ile tanımlanmıştır. Söz konusu denklemdeki "t" bağımsız değişkeni en genel halde x ve z nin bir işlevi olarak yazılabilir. O zaman (7.25), "r" yönüne bağlı olarak

$$f_+(r) = f(r) + j\hat{f}(r) \tag{7.91}$$
$$r = x + jz \tag{7.92}$$

durumuna dönüşür. (7.91) denkleminin FD ile ilişkisi, (7.23) e benzetilerek,

$$\hat{F}(w) = \left|\hat{f}(r)\right| e^{jw_0 r} \tag{7.93}$$

$$\hat{f}(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \left[S(w)\cos(wr) + G(w)\sin(wr)\right]dw \tag{7.94}$$

yazılabilir.

Potansiyel alanlarda (7.93) eşitliğinin sağlanabilmesi için potansiyellerin karmaşık olması gerekir. Karmaşık bir potansiyelin gerçel ve sanal bileşenlerinin olması zorunluluğu vardır. Söz konusu bu potansiyeller "U" ve "V" olarak gösterilebilir. Bu potansiyellerde Cauchy-Rieman koşulları geçerlidir.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial z}$$
$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial x} \tag{7.95}$$

Dolayısı ile U ve V bileşenlerinden oluşmuş karmaşık potansiyel en genel durumda,

$$W(r) = U(x,z) + j\,V(x,z) \tag{7.96}$$

dır. (7.96) bağıntısında:

$\frac{\partial U}{\partial x}$: U potansiyelinin x yönündeki türevi

$\frac{\partial U}{\partial z}$: U potansiyelinin z yönündeki türevi

$\frac{\partial V}{\partial z}$: V potansiyelinin z yönündeki türevi

$\frac{\partial V}{\partial x}$: V potansiyelinin x yönündeki türevi

dir. Bunlar birincil bileşenler olarak ta isimlendirilebilir.

Karmaşık potansiyelin "r" yönündeki bileşeni ise (7.76) denkleminden elde edilir.

$$M(r) = -\frac{\partial W}{\partial r} = -\left[\frac{\partial U}{\partial x} + j\frac{\partial V}{\partial x}\right] \tag{7.97}$$

Cauchy-Rieman bağıntıları kullanılarak

$$M(r) = -\frac{\partial W}{\partial r} = -\left[\frac{\partial U}{\partial x} - j\frac{\partial V}{\partial z}\right] \tag{7.98}$$

yazılır. Buraya dek kullanılan notasyonların analitik sinyalle ilişkisi aşağıdaki gibi kurulur.

$$f_{+}(r) = f(x,z) + j\,\hat{f}(x,z) \tag{7.99}$$

Burada;

$$f(x,z) = U(x,z) = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial z}$$
$$\hat{f}(x,z) = V(x,z) = -\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial x} \tag{7.100}$$

dır. Cauchy-Rieman kuralı uygulanarak x ve z yönündeki türevler (ikincil bileşenler) elde edilir.

$$\alpha(x,z)=\frac{\partial f(x,z)}{\partial x}=-\frac{\partial f(x,z)}{\partial z}$$
$$\beta(x,z)=\frac{\partial f(x,z)}{\partial z}=\frac{\partial f(x,z)}{\partial x} \quad (7.101)$$

(7.101) denklemlerinden yararlanarak karmaşık potansiyelin bileşenleri arasında

$$\hat{f}(r)=\alpha(x,z)+j\beta(x,z) \quad (7.102)$$

bağıntısı yazılabilir. (7.71) ve (7.102) kullanılarak

$$g_{zx}(x)\leftarrow \text{HD}\rightarrow -g_{zz}(x) \quad (7.103)$$

elde edilir.
g
Kuramı, yukarıda kısaca belirtilen ikincil bileşenler arasındaki ilişki Nelson (1988) tarafından verilmiştir. Nelson'a göre ikincil bileşenler ve aralarındaki bağlantılar

$$g_{xx}=\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}=\frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-\alpha}{r^3}g_{\alpha z}\,d\alpha\,d\beta \quad (7.104)$$

$$g_{xy}=\frac{\partial^2 M}{\partial x\,\partial y}=\frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-\alpha}{r^3}g_{\beta z}\,d\alpha\,d\beta \quad (7.105)$$

$$g_{xz}=\frac{\partial^2 M}{\partial x\,\partial z}=\frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-\alpha}{r^3}g_{zz}\,d\alpha\,d\beta \quad (7.106)$$

$$g_{yx}=\frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y-\beta}{r^3}g_{\alpha z}\,d\alpha\,d\beta \quad (7.107)$$

$$g_{yy}=\frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y-\beta}{r^3}g_{\beta z}\,d\alpha\,d\beta \quad (7.108)$$

$$g_{yz}=\frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y-\beta}{r^3}g_{zz}\,d\alpha\,d\beta \quad (7.109)$$

$$g_{zx}=\frac{\partial^2 M}{\partial z\,\partial x}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-\alpha)g_{\alpha\alpha}+(y-\beta)g_{\alpha\beta}}{r^3}\,d\alpha\,d\beta \quad (7.110)$$

$$g_{zy}=\frac{\partial^2 M}{\partial z\,\partial y}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-\alpha)g_{\alpha\beta}+(y-\beta)g_{\beta\beta}}{r^3}\,d\alpha\,d\beta \quad (7.111)$$

$$g_{zz}=\frac{\partial^2 M}{\partial z^2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-\alpha)g_{\alpha z}+(y-\beta)g_{\beta z}}{r^3}\,d\alpha\,d\beta \quad (7.112)$$

olarak verilir.

Bunların frekans ortamındaki birbirleri ile ilişkisi ise yine Nelson (1988) tarafından kurulmuştur.

$$\Im[g_{xx}] = j\frac{u}{|u|}\Im[g_{xz}] \quad (7.113)$$

$$\Im[g_{xy}] = j\frac{u}{|u|}\Im[g_{yz}] \quad (7.114)$$

$$\Im[g_{xz}] = j\frac{u}{|u|}\Im[g_{zz}] \quad (7.115)$$

$$\Im[g_{yx}] = j\frac{u}{|u|}\Im[g_{xz}] \quad (7.116)$$

$$\Im[g_{yy}] = j\frac{u}{|u|}\Im[g_{yz}] \quad (7.117)$$

$$\Im[g_{yz}] = j\frac{u}{|u|}\Im[g_{zz}] \quad (7.118)$$

$$\Im[g_{zx}] = -j\frac{u}{|u|}\Im[g_{xx}] - j\frac{v}{|u|}\Im[g_{xy}] \quad (7.119)$$

$$\Im[g_{zy}] = -j\frac{u}{|u|}\Im[g_{xy}] - j\frac{v}{|u|}\Im[g_{yy}] \quad (7.120)$$

$$\Im[g_{zz}] = -j\frac{u}{|u|}\Im[g_{xz}] - j\frac{v}{|u|}\Im[g_{yz}] \quad (7.121)$$

Not: u, v frekans ortamı bağımsız değişkenleri, $|k| = (u^2 + v^2)1/^2$ dir.

7.3.8 HD nün potansiyel alanlara ait bazı uygulamaları

Jeofizikte, arazide alınan ölçülerden yararlanılarak, anomaliyi oluşturan bozucu kütleye ait bazı parametrelerin saptanması istenir. Bu parametrelerin saptanabilmesi için çok sayıda yöntem bulunmaktadır. Ancak genelde, tek bir arazi eğrisinden yararlanılarak birden fazla parametre belirlenmeye çalışılır. Örneğin en basit bir problem olan, gravitede silindir probleminde bile olay
böyledir. Tek bir anomaliden, silindire ait derinlik, kütle ve silindirin yerini veren konum parametresinin bulunması istenir (Şekil 7.18).

Böylesine basit bir örnekte bile üç parametrenin bulunması zorunluluğu vardır. Doğrudan çözümlerde, bir tek anomaliden (bilgi eğrisi) gidilerek birden fazla parametre belirlenmesi hemen hemen olanaksızdır. Bu nedenle HD kullanılarak yardımcı bilgi eğrileri üretilir.

HD de amaç, $g_z(x)$ eğrisinden yararlanarak bazı bilgi eğrilerinin türetilmesi, bunların hep birlikte kullanılarak tüm parametrelerin çözülmesidir. Söz konusu bilgi eğrilerini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

1. M(x) : Potansiyel anomalisi

2. $g_x = \dfrac{\partial M}{\partial x}$: potansiyelin y yönündeki türevi

$$g_y = \frac{\partial M}{\partial y}: \text{ potansiyelin y yönündeki türevi}$$

$$g_z = \frac{\partial M}{\partial z}: \text{ potansiyelin z yönündeki türevi}$$

(düşey bileşen, çekim kuvveti)

Birincil bileşenler (7.76), (7.77) ve (7.78) denklemleriyle ve aralarındaki ilişki ise (7.79a) ile verilmiştir.

3. İkincil bileşenler (bileşenlerin türevleri) (7.113), (7.114), (7.115), (7.116), (7.117), (7.118), (7.119), (7.120) ve (7.121) bağıntılarından yararlanılarak bulunur.

4. $a(x) = \left[g_z^2(x) + g_x^2(x)\right]^{1/2}$: genlik eğrisi (zarf, sismikte yansıma enerjisi)

5. $\phi(x) = \tan^{-1}\left[\frac{g_x(x)}{g_z(x)}\right]$: evre eğrisi

6. $a_x(x) = \frac{\partial a(x)}{\partial x}$: anlık genlik eğrisi

7. $\phi_x(x) = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x}$: anlık evre eğrisi (birçok yayında anlık frekans olarak geçer)

Yukarıda belirtildiği gibi bir adet arazi eğrisinden birçok bilgi eğrisi üretilmektedir. Bu bilgi eğrilerinin ister birbirleri ile olan ilişkisinden (kesiştikleri yerler) isterse köklerinden yararlanılarak parametreler doğrudan doğruya saptanabilir. Bu konuda örnekler aşağıda verilmektedir.

Örnek 7.1

Gravitede düşey süreksizlik (yatay yarı sonsuz tabaka) probleminin çözümü

Şekil 7.19 da verilen bir düşey süreksizliğin gravite değişimi,

$$g(x) = 2\,\Delta\rho\,k\,t\left[\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{x-d}{z-h}\right)\right] \tag{7.122}$$

ile verilir. (7.122) denkleminin yatay ve düşey türevi (z=0 da) oluşturulabilir.

$$g_x(x) = 2\,k\,\Delta\rho\,t\,\frac{h}{h^2 + (x-d)^2} \tag{7.123}$$

$$g_z(x) = 2\,k\,\Delta\rho\,t\,\frac{x-d}{h^2 + (x-d)^2} \tag{7.124}$$

Karmaşık bileşen ise;

$$g_c(x) = 2k\Delta\rho t\left[\frac{x-d}{h^2+(x-d)^2} + j\frac{h}{h^2+(x-d)^2}\right]$$

(7.125)

dir. Bilindiği gibi yatay ve düşey türevler (potansiyelin ikincil bileşenleri) arasındaki ilişki (7.103) denklemi ile kurulur. (7.103) denklemindeki $g_x(x)$ ve $g_z(x)$ bileşenleri ilgili analitik denklemi olan (7.122) den elde edilebilir. Ancak arazi eğrilerinde modelin analitik denklemi bilinmediğinden $g_x(x)$, arazi eğrisinin "x" yönünde sayısal türevi ile bulunabilir. $g_z(x)$ i ise türev yolu ile bulmak olanaksızdır. $g_z(x)$ bileşeni de (7.79a) denkleminde olduğu gibi $g_x(x)$'in HD alınarak elde edilir. Böylece yatay türevden gidilerek düşey türev saptanır.

$g_x(x)$ ise herhangi bir sayısal türev yöntemi kullanılarak bulunabilir. Bunun için Taylor serisi merkezi farklar kullanılarak iki nokta için açılırsa;

$$y_i' = \frac{1}{12\,\Delta x}\left[8(y_{i+1} - y_{i-1}) + (y_{i-2} - y_{i+2})\right] \qquad i = 3,4,5, \quad ,n-2 \tag{7.126}$$

elde edilir. Bu bağıntıda:

n : Tüm veri sayısı.
i : Sayıcı.
Δx : Örnekleme aralığı.

Genlik ve evre ise sırası ile aşağıdaki bağıntılar yardımı ile verilir.

$$a(x) = \left[g_z^2(x) + g_x^2(x)\right]^{1/2} = 2k\,\Delta\rho\, t\left[h^2 + (x-d)^2\right]^{1/2} \tag{7.127}$$

$$\phi(x) = \tan^{-1}\left[\frac{g_x(x)}{g_z(x)}\right] = \tan^{-1}\left(\frac{h}{x-d}\right) = an^{-1}\left(\frac{h}{x-d}\right) \tag{7.128}$$

(7.115)
(7.116) denkleminde x=d için $\phi(x)=\pi/2$ değerini, sıçrayarak alır (Şekil 7.20). (7.128) denkleminden, evre eğrisinin sıçrama yaptığı yerin, profil üzerindeki izdüşümünün konum faktörü olan "d" ye eşit olduğu anlaşılmaktadır. x=d bulunduktan sonra (Şekil 7.21) bu değer aşağıdaki denklemlerde yerine konarak diğer bilinmeyenler bulunabilir. (7.122) kullanılarak, sıra ile,

$$g(x=d) = \pi k\,\Delta\rho\, t \qquad 7.(129)$$

$$t = \frac{g(x=d)}{\pi k\,\Delta\rho} = \frac{2}{\pi}\frac{g(x=d)}{a(x=d)} \tag{7.130}$$

$$h = \frac{2}{\pi}\frac{g(x=d)}{a(x=d)} - \frac{t}{2} \tag{7.131}$$

$$\Delta\rho = \frac{a(x-d)}{26.65} \tag{7.132}$$

elde edilir.

Burada önerilen yöntem 3 ayrı model için uygulanmış ve kuramsal parametre değerleri ile yöntem sonucu bulunan parametre değerleri Çizelge 7.3 de verilmiştir.

Örnek 7.2
Gravitede silindir probleminin çözümü

Gravitede silindirin düşey bileşeni,

$$g_z(x) = \frac{G\,m\,h}{x^2 + h^2} \tag{7.133}$$

Not: G gravite sabiti olup birim olarak alınmıştır.

---

denklemi ile verilir. İkincil bileşenler arasında, (7.103) bağıntısı geçerlidir.

$$\mathrm{Ger}|G(w)| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m\,h}{x^2 + h^2} \cos(wx)\,dx \tag{7.134a}$$

$$\mathrm{Ger}|G(w)| = m\,\pi\,e^{-wh} \tag{7.134b}$$

$\Delta\rho = 0.2$ gr/cm^3		d (km)	h (km)	t (km)
Model 1	Kuramsal	25.00	5.00	5.00
	Hesaplanan	25.00	5.00	4.99
Model 2	Kuramsal	25.00	10.00	5.00
	Hesaplanan	25.00	9.99	4.99
Model 3	Kuramsal	25.00	20.00	5.00
	Hesaplanan	25.00	19.99	4.99

Çizelge 7.3 Kuramsal parametre değerleri ile yöntem sonucu bulunan parametre değerleri (Pınar 1985)

$$\mathrm{San}|G(w)| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m\,h}{x^2 + h^2} \sin(wx)\,dx \tag{7.135a}$$

$$\mathrm{San}|G(w)| = 0 \tag{7.135b}$$

(7.135) denklemleri kullanılarak yatay bileşen,

$$g_x(x) = -m \int_{-\infty}^{\infty} e^{-wh} \sin(wx) dw \tag{7.136}$$

olarak bulunur. (7.135) denklemi

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{m}{a^2 + m^2}$$

Erdelyi (1954) tümlev kalıpları kullanılarak çözüldüğünde,

$$g_x(x) = \frac{m\, x}{x^2 + h^2} \tag{7.137}$$

elde edilir. Yatay ve düşey bileşenlerin ortak çözümünden,

$$g_z(x) = g_x(x) \tag{7.138}$$

oluşturularak,

$$h = -x \tag{7.139}$$

bulunur. (7.139) denklemi ve ortak çözümlerin anlamı Şekil 7.22 de verilmektedir. (7.139) ise bize silindirin derinliğini verir. Düşey bileşen bağıntısında x=0 konularak ta

$$m = z \,.\, g(x = 0) \tag{7.140}$$

denkleminden "m" parametresi bulunur.

Örnek 7.3
Manyetikte, düşeyde sonsuza uzanan plaka probleminin çözümü.

z ekseni boyunca sonsuza uzanan bir plakanın düşey bileşeni (Grant and West 1965),

$$V(x) = A \frac{h \cos(Q) - x \sin(Q)}{h^2 + x^2} \tag{7.141}$$

bağıntısı ile verilir. Bu bağıntıda:

A : Plakanın manyetik sabitlerini içeren terim.
Q : Mıknatıslanma açısı.

Yatay ve düşey bileşenler arasındaki (7.79a) ilişkisi ve (7.63b) yaklaşımı kullanılarak düşey bileşenden hareketle yatay bileşen H(x) hesaplanır. (7.63b) bağıntısındaki gerçel ve sanal bileşenler Fourier kosinüs ve sinüs dönüşümleri yardımıyla,

$$\text{Ger}\, V(w) = \int_{-\infty}^{\infty} A \frac{h \cos(Q) - x \sin(Q)}{h^2 + x^2} \cos(wx) dx \tag{7.142}$$

$$\mathrm{San}\,V(w) = \int_{-\infty}^{\infty} A \frac{h\cos(Q) - x\sin(Q)}{h^2 + x^2} \sin(wx)\,dx \tag{7.143}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler tek ve çift bileşenlerin özellikleri kullanılarak çözülür.

$$\mathrm{Ger}\,V(w) = -A\,\pi\cos(Q)e^{-wh} \tag{7.144}$$

$$\mathrm{San}\,V(w) = -A\,\pi\sin(Q)e^{-wh} \tag{7.145}$$

Not: (7.142) ve (7.143) denklemlerinin çözümünde rezidü kuramı da kullanılabilir (bu örneğin sonundaki Not'a bakınız).

(7.144) ve (7.143) denklemleri (7.41b) de yerine konarak,

$$H(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \left[A\,\pi\sin(Q)e^{-wh}\cos(wx) - A\,\pi\cos(Q)e^{-wh}\sin(wx)\right]dw \tag{7.146}$$

bulunur. Bu denklemin çözümünden de (Erdelyi 1954)

$$\int_0^{\infty} e^{-ay}\cos(by)\,dy = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ay}\sin(by)\,dy = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

$$H(x) = \frac{1}{\pi}\left[A\,\pi\sin(Q)\frac{h}{h^2 + x^2} - A\,\pi\cos(Q)\frac{x}{h^2 + x^2}\right]$$

$$H(x) = A\frac{h\sin(Q) - x\cos(Q)}{h^2 + x^2} \tag{7.147}$$

elde edilir.

Yatay ve düşey bileşenlerin [(7.141) ve (7.147)] oranından;

$$\frac{V(x)}{H(x)} = \frac{h\cos(Q) - x\sin(Q)}{h\sin(Q) - x\cos(Q)}$$

$$Q = \tan^{-1}\left\{\frac{h\,[H(x)] + x\,[V(x)]}{h\,[V(x)] + x\,[H(x)]}\right\} \tag{7.148}$$

elde edilir. V(x) ile H(x) in ortak çözümlerinden;

$$V(x) = H(x)$$

$$h = -x \tag{7.149}$$

bulunur. V(x=0) ve H(x=0) değerleri kullanılarak ta,

$$A = h\left[V^2(x=0) + H^2(x=0)\right]^{1/2} \tag{7.150}$$

parametrelerine ulaşılır (Mohan ve diğ. 1982).

Not: (7.141) denkleminin FD

$$V(w) = \int_{-\infty}^{\infty} A \frac{h\cos(Q) - x\sin(Q)}{h^2 + x^2} e^{-jwx}\, dx$$

olarak yazılabilir. Bu denklem düzenlenirse,

$$V(w) = A\, h\cos(Q) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jwx}}{h^2 + x^2}\, dx - A\sin(Q) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\, e^{-jwx}}{h^2 + x^2}\, dx$$

şeklini alır. Bu tümlevde z=jx dönüşümü yapılırsa,

$$V(w) = \frac{A\, h\cos(Q)}{j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-wz}}{h^2 - z^2}\, dz - A\sin(Q) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z\, e^{-wz}}{h^2 - z^2}\, dz$$

elde edilir. Bu tümlevlerin çözümü için Rezidü kuramı kullanılır. Kompleks kuramdan anımsandığı gibi;

$$\int f(z)dz = \pi\, j\, a_{-1}$$

$$a_{-1} = \lim_{z \to a} (z - a) f(z) \quad (\text{rezidü})$$

z = h için rezidü: tümlevin 1. kısmı için

$$a_{-1} = \lim_{z \to h} \frac{(z - h) e^{-wz}}{h^2 - z^2} = -\frac{e^{-wh}}{2h}$$

tümlevin 2. kısmı için;

$$a_{-1} = \lim_{z \to h} \frac{(z - h) z\, e^{-wz}}{h^2 - z^2} = -\frac{e^{-wh}}{2}$$

elde edilir. z=-h ın jeofizikte bir anlamı yoktur (yani "-" derinlik olmaz) dolayısı ile bu çözüm yapılamaz. O zaman gerçel ve sanal bileşenler,

$$\text{Ger } V(w) = -A\, h\cos(Q) \left[\frac{\pi}{h} e^{-wh} \right] = -A\, \pi\cos(Q) e^{-wh}$$

$$\text{San } V(w) = A\sin(Q) \left[-\pi\, j e^{-wh} \right] = -j\, A\, \pi\sin(Q) e^{-wh}$$

olarak elde edilir.

Örnek 7.4
Doğal potansiyel yönteminde düşey çubuk modeli çözümü

Şekil 7.23 deki bir çubuğun P(x) noktasında oluşturacağı potansiyel (Rao 1983) aşağıdaki bağıntı ile verilir.

$$V(x) = M \log \frac{x^2 + h^2}{x^2 + H^2}$$
$$M = \frac{\rho I}{2\pi} \tag{7.151}$$

(7.151) denkleminin "x" ve "z" yönünde türevleri alınarak yatay ve düşey yönlerdeki elektrik alan bileşenleri (potansiyelin türevleri) bulunabilir

$$E_x(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} = 2M\left[\frac{x}{x^2 + h^2} - \frac{x}{x^2 + H^2}\right] \tag{7.152}$$
$$E_z(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial h} = 2M\left[\frac{h}{x^2 + h^2} - \frac{H}{x^2 + H^2}\right] \tag{7.153}$$

Karmaşık bileşen ise:

$$E_c(x) = E_z(x) + j E_x(x) \tag{7.154}$$

yardımıyla oluşturulur. Bilindiği gibi elektrik alanların yatay ve düşey yöndeki bileşenlerinden birbirlerine geçiş HD ile kurulur. (7.153) bağıntısında $E_z(x)=0$ yaklaşımı kullanılarak kökler elde edilir (Şekil 7.24).

Çubuğun elektrik alanı, ilgili bileşenleri ve kökleri (7.153) denkleminde H=h+L konularak sıfıra eşitlenirse;

$$x_{1,2} = \pm(hH)^{1/2} \tag{7.155}$$

elde edilir. E_x ve E_z bileşenleri iki noktada birbirlerini kesmektedir. Bu noktalar, (7.152) ve (7.153) denklemlerinin ortak çözümlerinden bulunabilir. Ortak çözümden;

$$x^2(H - h) + x(H^2 - h^2) + (-hH^2 - h^2H) = 0 \tag{7.156}$$

elde edilir. Bu denklem $(hH)^{1/2}=x_1$ konularak çözüldüğünde,

$$x_3 = -\frac{2h + L}{2} + \frac{(L^2 + 8x_1^2)^{1/2}}{2} \tag{7.157}$$
$$x_4 = -\left[\frac{2h + L}{2} + \frac{(L^2 + 8x_1^2)^{1/2}}{2}\right] \tag{7.158}$$

x_3 ve x_4 apsisleri arasındaki uzaklık "s" ise,

$$s = x_3 + |x_4| \tag{7.159}$$

denkleminden elde edilir. Buradan "L" çekilirse çubuğun boyu

$$S = \left(L^2 + 8x_1^2\right)^{1/2} \qquad (7.160)$$

eşitliğinden saptanır.

$E_x(x)$ işlevinin "x" eksenini kestiği yer x=0 noktasını verir. (7.151) de bu değer yerine konarak M parametresi;

$$M = \frac{E_z(x=0)x_1^2}{2L} \qquad (7.161)$$

bulunur. Çubuğun üst ucunun yüzeyden olan derinliği çubuğun potansiyel denkleminde x=0 değeri kullanılarak belirlenir.

$$h = x_1\, e^{[V(x=0)/M]^{1/4}} \qquad (7.162)$$

Çubuğun alt ucunun derinliği ise;

$$H = h + L \qquad (7.163)$$

den elde edilir.

Sayısal bir örnek olarak, kuramsal parametre değerleri Çizelge 7.4 de verilen çubuğun yatay bileşeni $E_x(x)$ (7.100) kullanılarak türev yolu ile hesaplanmıştır (Şekil 7.25). Bu denklemin HD alınarak düşey gradyan $E_z(x)$ elde edilmiştir (Şekil 7.26). Elde edilen eğrilerin x_1, x_2, x_3, x_4 kökleri bulunarak ve (7.160), (7.161), (7.162) ve (7.163) denklemleri kullanılarak L, M, h ve H parametlerine ulaşılmıştır (Çizelge 7.4). Kuramsal parametreler ile uygulama sonucu elde edilen parametrelerin birbirlerine çok yakınlığı yöntemin sağlığını göstermektedir.

Parametreler	**Kuramsal**	**Yöntem sonucu**
H	5	4.99
H	15	14.99
L	10	9.97
M	100	99.97

Çizelge 7.4 Çubuğun yatay ve düşey gradyanları arasındaki HD sonuçları (burada h, H ve L nin birimi m dir)

Örnek 7.5
Karmaşık sismik iz ve uygulaması

Bu örnekte matematiksel bağıntılar verilmeyecektir. Çünkü tüm matematiksel bağıntılar konuda ve önceki örneklerde verilmiştir.

Burada önce 1 Hz frekanslı basit bir sinüs dalgacığına ait örnekler verilmekte ve fiziksel kavramlar gösterilmektedir. İkinci adımda problem karıştırılarak değişik iki frekanslı inüzoidalin toplamından oluşmuş bir dalgacığa ait örnekler verilmiştir. Daha sonrada araziden elde edilen bir sismik ize yöntem uygulanmıştır. Şekiller çizilirken normalize edilmiştir Yılmaz (1978).

Şekil 7.27 de 1 Hz lik bir sinüs dalgacığı görülmektedir. Şekil 7.28 ve 7.29 de ise bu dalgacığın gerçel ve sanal bileşenleri çizilmiştir. Gerçel bileşen giriş sinyalinin aynı, sanal bileşen de 90° evre kaymışı olarak beklenir. Gerçekten de Şekil 7.28 giriş sinyalinin aynıdır. Ancak Şekil 7.29 ise giriş sinyalinin 90° evre kaymış şeklidir.

Şekil 7.30 da ise sinyalin zarfı (genlin eğrisi veya sismikte yansıma enerjisi) (7.55) denkleminden hesaplanarak, Şekil 7.31 de ise (7.26b) denkleminden bulunan evre eğrisi (sismikte anlık frekans olarak ta anılır) verilmiştir. Verilen 1 Hz frekanslı sinüs dalgacığının genliği (yansıma enerjisi) yine birim genliklidir ve herhangi bir şekil bozukluğu göstermez. Şekil 7.32 de gösterilen anlık evrede herhangi bir değişiklik yoktur. Burada beklenen frekans kuşkusuz ki 1 Hz dir. Hesaplanan sayılar da 6.28 civarındadır ki bu da 1 Hz in radyan cinsinden karşılığıdır.

İkinci aşamada frekansları 0.5 Hz ve 4 Hz olan sinyalin birbirleri üzerine bindirilmesinden (genlik modülasyonu) oluşmuş bir iz ele alınmıştır (Şekil 7.33). Bunun gerçel bileşeninin giriş sinyalinin aynı, sanal bileşenin de 90° evre kaymasına uğramış şekli beklenir. Gerçekten de durum böyledir (Şekil 7.34 ve 7.35). Sinyalin genlik (Şekil 7.36) eğrisi (yansıma enerjisi) ise 0.5 Hz lik sinüs dalgasının bindirilmesinden kaynaklanan etkiden ötürü zamanda değişim göstermektedir. Bindirilmiş dalgaların evre ve anlık evre eğrileri de Şekil 7.37 ve 7.38 de verilmektedir.

Üçüncü aşamada ise gerçel bir sismik sinyalin HD alınmıştır. Şekil 7.39 da sismik sinyal görülmektedir. Bunun gerçel (sinyalin aynısı) ve sanal bileşenleri ise Şekil 7.40 ve 7.41 de görülmektedir. Şekil 7.42, 7.43 ve 7.44 te ise söz konusu izin genlik eğrisi, evre eğrisi ve anlık evre eğrileri görülmektedir.

7.4 z DÖNÜŞÜMÜ

x ortamında örneklenmiş bir verinin ayrık FD

$$F(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-jwn\Delta x} \qquad w = \pi f \qquad n = 0,1,2,....... \tag{7.164}$$

(7.164) bağıntısında $z=e^{jw\Delta x}$ konursa

$$F(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n z^{-n} \tag{7.165}$$

elde edilir. Bu bağıntılarda:

F(w): w açısal frekansının bir işlevi veya $\Im[f(x)]$.
F(z): karmaşık değişken.

$$z = e^{jw\Delta x} = \cos(w\Delta x) + j\sin(w\Delta x) \tag{7.166}$$

Tüm w açısal frekansları için $|z|=1$ dir. (7.165) bağıntısına f_n ayrık verisinin z dönüşümü denir. w, -∞ dan +∞ a kadar değiştikçe z karmaşık değişkeni, z düzleminde yarıçapı $|z| = 1$ (birim) olan çember üzerinde değer alır (Şekil 7.45). Şekil 7.45a dan anlaşılacağı gibi w açısı değiştikçe z düzleminde dönemli yinelemeler olacaktır. w nın sıfırdan 2π ye kadar değişmesi z nin birim çember üzerinde 2π ile çakışması anlamındadır.

Örnek 7.6
w nın π/2 Δx kadar artarak sıfırdan π/Δx e kadar artışını inceleyiniz.

w	0	$\pi / 2\,\Delta x$	$\pi / \Delta x$	$3\pi / 2\,\Delta x$	$2\pi / \Delta x$
$z = e^{jw\Delta x}$	1	j	-1	-j	1

$$z = e^{jw\Delta x} = \cos(w\Delta x) + j\sin(w\Delta x)$$

kullanılır. Yani "w" nın w_n = 2π/Δx den $2w_n$ değerine doğru arttırılması yukarıda verilen z değerlerinin yinelenmesi anlamına gelir. Bu yineleme, dönemli olarak w nın her w_n artışında (katlanma frekansı) tekrar görülecektir.

Eğer bir zaman veya uzay serisi aşağıdaki gibi örneklenmiş ise;

$$x = (......, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, ...)$$

bunun z dönüşümü (7.165) bağıntısından dolayı, değişkeni z olan bir polinomdur. Polinomun katsayıları ise örneklenmiş değerlerdir.

$$F(z) = ... + f_{-2}z^2 + f_1 z + f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + ...$$

$$F(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n z^{-n} \tag{7.167}$$

Bu dönüşümün z^{-1} ile çarpılması, tüm zaman serisinin, artan zaman ekseni boyunca bir örnekleme aralığı kadar kaydırılması anlamındadır. Öyleyse z dönüşümü aynı zamanda bir kaydırma işlemidir.

Örnek 7.7
Örneklenmiş dürtü (δ) işlevi:

f = (.....,0,0,1,0,0,....)
↑
t=0 zamanı

olarak verilmiştir. Bunun "z" dönüşümünü bulunuz.

$$F(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n z^{-n}$$
$$F = 1 z^{-0} = 1$$

Bu dürtü işlevini 3 birim kadar kaydıralım.

f = (.....,0,0,0,0,0,1,0,0,....)
↑
$$F(z) = 1 z^{-3} = z^{-3}$$

olarak bulunur.

Örnek 7.8
İki iz sayısal olarak, f_1=(2,0,-1), f_2=(4,2,1) olarak verilmektedir. İki izin z dönüşümünü alınız, elde edilen polinomların çarpımını bulunuz.

(7.167) bağıntısından;

$$F_1(z) = 2z^0 + 0z^{-1} + (-1)z^{-2}$$
$$F_1(z) = 2 - z^{-2}$$
$$F_2(z) = 4z^0 + 2z^{-1} + 1z^{-2}$$
$$F_2(z) = 4 + 2z^{-1} + z^{-2}$$
$$Y(z) = F_1(z)F_2(z) = (2 - z^{-2})(4 + 2z^{-1} + z^{-2})$$
$$Y(z) = 8 + 4z^{-1} + 2z^{-2} - 4z^{-2} - 2z^{-3} - z^{-4}$$
$$Y(z) = 8 + 4z^{-1} - 2z^{-2} - 2z^{-3} - z^{-4}$$
$$y(n) = f_1(n).f_2(n)$$
$$y(n) = (8,4,-2,-2,-1)$$

Örnek 7.9
Birim basamak işlevi;

f_1 = (.....,0,1,1,1....)
↑

olarak verilir. Bunun z dönüşümünü bulunuz.

$$F_1(z) = 1z^0 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + ... = \frac{1}{(1 - z^{-1})}; \left|z^{-1}\right| < 1$$

dır. Örnekte verilen zaman serisi iki örnekleme aralığı kadar kaydırılsın.

f_2 = (......0,1,1,1,1,.....)
↑

Bunun z dönüşümü,

$$F_2(z) = 1z^2 + 1z^1 + 1z^0 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + \ldots\ldots..$$
$$F_2(z) = z^2 + z + \underbrace{1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots\ldots.}_{F_1(z)}$$
$$F_2(z) = z^2 + z + F_1(z)$$

$F_1(z)$ yerine değeri yazılarak,

$$F_2(z) = z^2 + z + \frac{1}{(1 - z^{-1})}$$

gerekli işlemler yapıldığında,

$$F_2(z) = z^2\, F_1(z)$$

elde edilir. Son bağıntıdan da görüldüğü gibi "z" bir kaydırma işleci gibi çalışmaktadır. Yani z dönüşümü bir kaydırma işleci olarak düşünülürse aşağıdaki bağıntıya ulaşılır.

$$z^{-n} f_r = f_{r-n} \qquad (7.168)$$

Evrişim de bir tür kaydırmalı çarpımdır (Bkz Bölüm 5.5). Dolayısı ile evrişime giren seriler polinom şeklinde yazılıp "z" dönüşümleri alınarak çarpım şeklinde gösterilebilir.

Örnek 7.10
Bölüm 5.5 te verilen A=(1,2), B=(1,2,3) şeklinde iki dalgacığın evrişimini "z" dönüşümü alarak bulunuz.

$$\begin{array}{llll}
 & B(z) & b_0 + b_1 z + b_2 z^2 & 1 + 2z + 3z^2 \\
\text{x} & A(z) \quad \rightarrow & a_0 + a_1 z \quad \rightarrow & \text{x} \quad 1 + 2z^2 \\
\hline
 & B(z)A(z) & a_0 b_0 + a_0 b_1 z + a_0 b_2 z^2 & 1 + 2z + 3z^2 \\
 & & \quad + a_1 b_0 z + a_1 b_1 z^2 + a_1 b_2 z^3 & \quad + 2z + 4z^2 + 6z^3 \\
\hline
 & & a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + & 1 + 4z + 7z^2 + 6z^3 \\
 & & \quad + (a_0 b_2 + a_1 b_1) z^2 + a_1 b_2 z^3 &
\end{array}$$

Bölüm 5.5 te verilen c_0, c_1, c_2 katsayıları kullanılırsa,

$$c_0 = a_0 b_0 = 1$$
$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 4$$
$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 = 7$$
$$c_3 = a_1 b_2 = 6$$

elde edilir.

---

z dönüşümünden doğrusal dönüşüm işlevlerinin hesaplanmasında yararlanılır.

$$\underset{\text{çıktı}}{Y(z)} = \underset{\text{girdi}}{F(z)} \;.\; \underset{\text{dönüşüm işlevi}}{W(z)} \tag{7.169}$$

dönüşüm işlevi $W(z) = \dfrac{Y(z)}{F(z)}$

(7.170)

dir. Rasyonel kesirlerin pay ve paydasının z dönüşümü alındıktan sonra köklerin analizi yapılmalıdır.

Not: Sıfırlar

İki boydan oluşmuş bir dalgacığa dipol dalgacık denir. Böyle bir dalgacık normalleştirildiğinde ya (1,a) yada (a,1) şeklinde gösterilebilir. Eğer $|a| < 1$ ise en küçük gecikmeli (EKGD) , $|a| > 1$ ise en büyük gecikmeli dalgacık (EBGD) ismini alır (Şekil 7.46.1).

P_1 ve P_2 noktalarına süzgecin sıfırları denir. EKGD ile EBGD arasında ilişki vardır. EKGD (1,a) ise, EBGD (a^*,1) dir. Örneğin EKGD (1,0.5), EBGD (-0.5,1) dir.

Süzgecin sıfırları iki dalgacığın evre spektrumlarının karşılaştırılmasında kullanılır. EKGD ın z dönüşümü 1+az, EBGD ın z dönüşümü ise a+z dir. Bunların z düzlemindeki görünümleri Şekil 7.46.2 de verilmektedir. Söz konusu şekillerdeki üçgenler veya açılarla ilgili aşağıdaki bağıntılar kurulur.

ABC üçgeninde $C\hat{A}B < A\hat{C}B$ dir. Üçgenlerin eşitliğinden

$$A\hat{B}C \cong R\hat{Q}P \quad \text{ve} \quad \hat{\varphi}_1 < \hat{\varphi}_2$$

yazılır. Şekillerden $-\pi < \theta < 0$, $-\varphi_1 < -\varphi_2$ olduğu görülmektedir. Bu nedenle $|\varphi_1| < |\varphi_2|$ şeklinde genelleştirilebilir.

θ açısı $+\pi \to 0 \to -\pi$ ye giderken (frekans “f” de $-1/2\Delta t \to 0 \to 1/2\Delta t$) ye gider φ_1 açısı sıfırdan $\pi/2$ ye doğru artar, daha sonra sıfıra ve $-\pi/2$ ye doğru azalarak sonuçta sıfır olur; φ_2 ise $(\pi,-\pi)$ aralığında sürekli olarak azalır (Şekil 7.46.3).

Evre açılarının aldığı konumlar nedeniyle EKGD a en küçük evreli dalgacık ve EBGD da en büyük evreli dalgacık denir.

Kutuplar

Eğer herhangi bir süzgecin dönüşüm işlevi kesirli bir ifade ise, bunun paydasının kökleri sıfırları verir. Örneğin bir süzgecin dönüşüm işlevi

$$F(z)=\frac{1-2z}{z^2+2z+5}$$

İse bunun sıfırları

$$1-2z=0;\quad z=0.5$$

Kutupları

$$z^2+2z+5=0$$
$$z_1=-1-2j \quad , \quad z_2=-1+2j$$

Dir. Süzgece ait kutup ve sıfırlar grafiklendiğinde evre ve genlik değişimlerine ait bilgilere kolaylıkla ulaşılır. Bir süzgecin kutup ve sıfırları z düzleminde yerleştirilerek sayısal süzgeçler elde edilir. Eğer bir sinyalin herhangi bir frekansındaki bileşen ortadan kaldırılmak isteniyorsa, süzgeç düzenlenirken o fekansa karşılık gelen yerde sıfırları olan rasyonel bir süzgeç düzenlenebilir.

Örnek 7.11

Aşağıdaki iki işlevin t=0,1,2,...,n değerleri için z dönüşümünü bulunuz. z değişkenine bağlı A(z) işlevini toplam işareti altında gösteriniz.

a. $\left.a_t=k^t\right\}\ a_t=0 \quad , \quad t<0$ için

b. $\left.a_t=t\,k^t\right\}\ a_t=0 \quad , \quad t<0$ için

a. $a=a_0,a_1,a_2,..., a_n$ bağıntısı polinomal olarak

$$A(z)=a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+.........+a_nz^{-n}$$

dir. Burada,

$$A(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_n z^{-n}$$

yaklaşımından yararlanarak,

$t=0$ için $a_0 = k^0 = 1$

$t=1$ için $a_1 = k^1 = k$

$t=2$ için $a_2 = k^2$

$t=3$ için $a_3 = k^3$

bulunur. Buradan da,

$$A(z) = 1 + kz^{-1} + k_2 z^{-2} + ... + k_n z^{-n}$$

$$A(z) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n z^{-n}$$

elde edilir.

b.

$t=0$ için $a_0 = 0$

$t=1$ için $a_1 = k$

$t=2$ için $a_2 = 2k^2$

$t=3$ için $a_3 = 3k^3$

bulunur. Buradan da,

$$A(z) = kz^{-1} + 2k_2 z^{-2} + 3k_3 z^{-3} + ... + nk_n z^{-n}$$

$$A(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, k_n z^{-n}$$

elde edilir.

Örnek 7.12

Aşağıdaki sistemin dizge işlevini bulunuz.

Not: Dizge işlevi için Bkz. Bölüm 11.

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$Z[y(t)] = Z[x(t)].\, Z[h(t)]$$

$$Y(z) = X(z).\, H(z) \rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$H(z) = \frac{1 + \sum_{n=1}^{\infty} k_n z^{-n}}{\sum_{n=1}^{\infty} n\, k_n z^{-n}}$$

7.5 HARTLEY DÖNÜŞÜMÜ

7.5.1 Hartley ve Fourier dönüşümlerinin ilişkisi

Gerçel bir f(t) dalgasının tümlev dönüşümü

$$\Phi(w) = (2\pi)^{1/2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wt)dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(wt)dt\right] \tag{7.171a}$$

$$\Phi(w) = (2\pi)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)[\cos(wt)+\sin(wt)]dt$$

$$\mathrm{cas}(wt) = \cos(wt)+\sin(wt) \tag{7.171b}$$

olarak verilir. O zaman (7.171a) bağıntısı

$$\Phi(w) = (2\pi)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{cas}(wt)dt \tag{7.171c}$$

durumuna gelir. Burada,

$$G(w) = \Im_c[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wt)dt$$

$$S(w) = \Im_s[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(wt)dt$$

dir (Bkz Bölüm 5.3).

$$\Phi(w) = (2\pi)^{1/2}\{\Im_c[f(t)] + \Im_s[f(t)]\} \tag{7.171d}$$

$$\Phi(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{cas}(wt)dt \tag{7.171e}$$

(7.171e) Hartley dönüşümü (HAD) olarak tanımlanır (Bracewell 1984). Kuşkusuz ki dalga karmaşık olabilir. Ancak (7.171a) denkleminden de açıkça görüleceği gibi tümlev dönüşümü, sinüs ve kosinüs dönüşümünden başka bir şey değildir. (7.171a) denkleminin ters dönüşümü,

$$f(t) = (2\pi)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(w)[\cos(wt)+\sin(wt)]dw \tag{7.172a}$$

ve (7.171c) ve (7.171d) ye benzer şekilde

$$f(t) = (2\pi)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(w)\mathrm{cas}(wt)dt \tag{7.172b}$$

$$f(t) = (2\pi)^{1/2}\{\Im_c^{-1}[\Phi(w)] + \Im_s^{-1}[\Phi(w)]\} \tag{7.172c}$$

dir. (7.171) ve (7.172) bağıntıları "Hartley Dönüşüm" çifti olarak bilinir. $F(w) = \Im[f(t)]$ olarak tanımlanırsa, F(w) ile Φ(w) arasındaki ilişki

$$F(w) = (2\pi)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jwt}\, dt \tag{7.173}$$

ve ters dönüşüm ise

$$f(t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{jwt}\, dt \tag{7.174}$$

dır.

$\Phi(w)$ işlevi tek ve çift işlevlerin toplamı olarak yazılabilir.

$$\Phi(w) = E(w) + O(w)$$

Bu bağıntıda:

$E(w)$: $\Phi(w)$ nın çift işlevi.

$O(w)$: $\Phi(w)$ nın tek işlevidir.

Tek ve çift işlevlerin özelliklerinden yararlanılarak

$$E(w) = \frac{\Phi(w) + \Phi(-w)}{2} = (2\pi)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(wt)\, dt \tag{7.175a}$$

$$O(w) = \frac{\Phi(w) - \Phi(-w)}{2} = (2\pi)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(wt)\, dt \tag{7.175b}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada genlik ve evre spektrumu (Saatçiler ve diğ 1990)

$$|A(w)| = \left[-E^2(w) + O^2(w)\right]^{1/2} = \left[\frac{\Phi^2(w) + \Phi^2(-w)}{2}\right]^{1/2} \tag{7.176a}$$

$$\theta(w) = \tan^{-1} \frac{O(w)}{E(w)} = \tan^{-1} \frac{\Phi(w) - \Phi(-w)}{\Phi(w) + \Phi(-w)} \tag{7.176b}$$

(7.175a) ve (7.175b) denklemleri $E(w) - jO(w)$ şeklinde kullanılarak FD bulunur.

$$F(w) = E(w) - jw = (2\pi)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos(wt) - j\sin(wt)]\, dt \tag{7.177}$$

(7.177) den yararlanarak $S(w)$ ve $\Phi(w)$ arasında

$$\Phi(w) = \mathrm{Ger}[F(w)] - \mathrm{San}[F(w)] \tag{7.178}$$

bağıntısı yazılabilir. (7.166) denkleminden de anlaşılacağı gibi, HAD, işlevin FD nün gerçel kısmından, sanal kısmının çıkarılmasıyla elde edilebilir.

7.5.2 Ayrık Hartley dönüşümü

(7.171a) denklemi ayrık olarak yazıldığında ayrık Hartley dönüşümü (AHAD) elde edilir.

$$H(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(k)\,\mathrm{cas}\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) \tag{7.179}$$

Burada:

N : AHAD alınacak nokta sayısı.
k : Tümlev değişkeni.
cas(θ) = cos(θ) + sin(θ).

Benzer normda AFD denklemi (Bkz Bölüm 8)

$$F(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(k)\,e^{-\frac{j2\pi nk}{N}} \tag{7.180}$$

dır. Ters AHAD ise

$$f(k) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H(n)\,\mathrm{cas}\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) \tag{7.181}$$

dır. Tek ve çift işlevlerin özellikleri kullanılarak

$$H(n) = E(n) + O(n) \tag{7.182}$$

$$E(n) = \frac{H(n) + H(N-n)}{2} \tag{7.183}$$

$$O(n) = \frac{H(n) - H(N-n)}{2} \tag{7.184}$$

olarak yazılır. Böylece AFD

$$F(n) = E(n) - jO(n) \tag{7.185}$$

ve

$$H(n) = \Im(f_{\text{çift}}) - \Im(f_{\text{tek}}) \tag{7.186}$$

olarak bulunur.

Not:

k= frekans ortamı sayıcısı, n=zaman ortamı sayıcısı, N=zaman ortamı nokta sayısı (aynı zamanda frekans ortamındaki toplam harmonik sayısıdır ve burada her ikisi de birbirlerine eşit alınmıştır.

Örnek 7.13

$$f(t)=\begin{cases} e^{-t} & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

işlevinin Hartley dönüşümünü bulunuz.

Bölüm 5 Örnek 5.4 ten

$$\Im_c\left(e^{-t}\right)=\frac{1}{1+w^2}$$
$$\Im_s\left(e^{-t}\right)=\frac{w}{1+w^2}$$

elde edilir. (7.171b) denkleminden,

$$\Phi(w)=(2\pi)^{1/2}\left[\frac{1}{1+w^2}+\frac{w}{1+w^2}\right]$$
$$\Phi(w)=\frac{(2\pi)^{1/2}(1+w)}{1+w^2}$$

bulunur. Şekil 7.47a da f(t)=e^{-t} sinyali ve onun FD Şekil 7.47b de verilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi sanal kısım aynı "w" ekseninde gerçel kısım ile birlikte gösterilebilir.

Örnek 7.14

SP de kürenin FD kullanılarak güç spektrumunun bulunması Bölüm 5 Örnek 5.26 da verilmiştir. Bu kez de aynı güç spektrumunu, Hartley dönüşümünü kullanarak bulunuz.

α açısıyla polarlanmış bir kürenin SP anomalisi (5.113) bağıntısı

$$V(x)=\frac{\Delta V R^2}{2}\left[\frac{h\cos(\alpha)+x\sin(\alpha)}{\left(x^2+h^2\right)^{3/2}}\right]$$

ile verilir (Heiland 1968). Burada ΔV kürenin iki kutbu arasındaki gerilim farkıdır. Öngörülen bağıntıda N=ΔR^2/2 tanımlaması yapılıp V(x) tek ve çift fonksiyonların toplamı şeklinde,

$$V(x)=V_ç(x)+V_t(x)$$
$$V_ç(x)=N\frac{h\cos(\alpha)}{\left(x^2+h^2\right)^{3/2}} \qquad (7.187)$$
$$V_t(x)=N\frac{x\sin(\alpha)}{\left(x^2+h^2\right)^{3/2}} \qquad (7.188)$$

elde edilebilir.

V(x) gerilim bağıntısının HAD (7.171) ve (7.172) yaklaşımları kullanılarak ve sabitler tümleme dışına alınarak,

$$V(x) = N\left[h\cos(\alpha)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(wx)}{\left(x^2+h^2\right)^{3/2}}\,dx + \sin(\alpha)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(wx)}{\left(x^2+h^2\right)^{3/2}}\,dx \right] \tag{7.189}$$

şeklinde tanımlanır.

(7.189) bağıntısının birinci ve ikinci terimleri Erdelyi (1954) tümleme çizelgeleri (Bkz Ek A) kullanılarak çözüldüğünde,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(wx)}{\left(x^2+h^2\right)^{3/2}}\,dx = \frac{2}{h}\,w\,K_1(wh) \tag{7.190}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(wx)}{\left(x^2+h^2\right)^{3/2}}\,dx = 2\,w\,K_0(wh) \tag{7.191}$$

bulunur. (7.190) ve (7.191) yardımıyla (7.189) tekrar düzenlenirse (Akçığ ve Pınar 1994),

$$V(w) = 2\,N\,w\cos(\alpha)K_1(wh) + 2\,N\,w\sin(\alpha)K_0(wh) \tag{7.192}$$

elde edilir. Burada $K_n(wh)$ Modifiye Bessel işlevi olup özellikleri Ek A da ayrıntılı olarak verilmiştir (Şekil 7.48).

V(x) gerilim bağıntısının FD alınarak bulunan dalgasayısı ortamı denklemi ise,

$$V(w) = 2\,N\,w\cos(\alpha)K_1(wh) - j\,2\,N\,w\sin(\alpha)K_0(wh) \tag{7.193}$$

olarak verilmiştir (Akçığ ve diğ. 1990).

Buradan güç spektrumu E(w),

$$E(w) = 4\,N^2\,w^2\cos^2(\alpha)K_1^2(wh) + 4\,N^2\,w^2\sin^2(\alpha)K_0^2(wh) \tag{7.194}$$

dır. Gerek HAD gerekse FD den elde edilen sonuç güç spektrumunun hesaplanmasında aynıdır.

Polarlanma açısı (α) nın, güç spektrumu üzerindeki denetimi (7.49) bağıntısı yardımıyla araştırılmıştır. Yapılan uygulamada (Şekil 7.49) derinlik (h) sabit tutulup, farklı polarlanma açıları (α=20°,40°,70°) için güç spektrumu eğrilerinin değişimi hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlardan (α) nın alçak frekanslar dışında spektrum eğimini etkilemediği gözlenmiştir.

Bu yaklaşımlar ve Modifiye Bessel fonksiyonlarının özellikleri gözönüne alınarak, SP uygulamalarında wh≥2 olduğundan

$$K_0 \equiv K_1 \equiv K \quad \text{ve} \quad K = \frac{1.253}{(wh)^{1/2}\, e^{wh}} \tag{7.195}$$

yazılabilir (Abramowitz ve Stegun 1972). Bu tanımlamalar ile (7.194) yeniden düzenlenirse (Şekil 7.48),

$$E(w) = 4\, N^2\, w^2\, K^2(wh) \tag{7.196}$$

elde edilir. $C=4N^2$ ile tanımlanıp, enerji spektrumunu doğrudan etkileyen parametreleri belirlemek ve doğrusallaştırmak için her iki tarafın logaritmaları alınacak olursa,

$$\mathrm{Ln}\, E(w) = \mathrm{Ln}\, C + 2\, \mathrm{Ln}(w) + 2\, \mathrm{Ln}(1.25) - \mathrm{Ln}(wh) - 2wh \tag{7.197}$$

bulunur.

(7.197) bağıntısını inceleyecek olursak birinci ve üçüncü terimlerin (küre yarıçapı ve potansiyel farkı) spektrum eğrisinin eğimine etkimediği, yalnızca genlik değerine etkidiği görülür. İkinci, dördüncü ve beşinci terimlerin ise spektrumun eğimine etkidiği, ancak bunların arasında ise temel etkinin -2wh teriminden kaynaklandığı saptanmıştır (Akçığ ve diğ. 1990).

Sonuç olarak, (7.197) bağıntısında

$$\mathrm{Ln}\, E(w) = -2wh$$

yaklaşımından yararlanılarak

$$\text{Eğim}=-2h \tag{7.198}$$

bağıntısına ulaşılır. (7.198) den yararlanılarak ta küre şekilli cismin derinliği bulunabilir. Şekil 7.50 ve Çizelge 7.5 te bu tür uygulamaya ilişkin bir örnek ve saptanan derinliklerin hata oranları görülmektedir. Çizelgeden de izlenebileceği gibi sonuçlar oldukça başarılıdır.

POLARLANMA AÇISI	**GERÇEK DER. (m)**	**HESAPLANAN DER. (m)**	**HATA ORANI %**
$\alpha=20^o$	h=100	h=96.6	3.4
$\alpha=40^o$	h=100	h=96.6	3.4
$\alpha=70^o$	h=100	h=96.6	3.4
$\alpha=40^o$	h=50	h=46.6	6.8
$\alpha=40^o$	h=100	h=96.6	3.4
$\alpha=40^o$	h=150	h=144.4	3.7

Çizelge 7.5 Çubuk modeline ait derinlikler ve hata oranları (potansiyel anomalisi)

Örnek 7.15
SP de çubuk biçimli yapının doğal gerilim belirtisinden yararlanarak Hartley dönüşümü yardımıyla güç spektrumunu bulunuz.

Yeraltında (α) polarlanma açısına sahip bir çubuğun (Şekil 7.51), yeryüzündeki izdüşümünden x uzaklıktaki bir P(x) noktasında oluşturacağı gerilimin bağıntısı,

$$V(x) = -\frac{\rho I}{2\pi}\left\{\left(x^2 + h_1^2\right)^{-1/2} - \left[\left(x - \frac{h_2 - h_1}{\tan(\alpha)}\right)^2 + h_2^2\right]^{-1/2}\right\} \tag{7.199}$$

ile verilir (Heiland 1968). Burada:

ρ = Ortamın özdirenci.

I = Akım yoğunluğu.

h_1 çubuğun üst ucunun, h2 çubuğun alt ucunun yeryüzüne olan uzaklığı olmak üzere, (7.199) bağıntısında

$$N = \frac{\rho I}{2\pi} \quad , \quad a = \frac{h_2 - h_1}{\tan(\alpha)} \tag{7.200}$$

tanımlamaları yapılıp, V(x) tek ve çift bileşenlerin toplamı şeklinde,

$$\begin{aligned} V_ç(x) &= \frac{1}{2}N\left[\frac{-2}{\left(x^2 + h_1^2\right)^{1/2}} + \frac{1}{\left[(x-a)^2 + h_2^2\right]^{1/2}} + \frac{1}{\left[(-x-a)^2 + h_2^2\right]^{1/2}}\right] \\ V_t(x) &= \frac{1}{2}N\left[\frac{1}{\left[(x-a)^2 + h_2^2\right]^{1/2}} - \frac{1}{\left[(-x-a)^2 + h_2^2\right]^{1/2}}\right] \end{aligned} \tag{7.201}$$

yazılabilir.

V(x) gerilim bağıntısının HAD, (7.171) ve (7.172) yaklaşımları kullanılarak ve sabitler tümlev dışına alınarak

$$\begin{aligned} V(w) = {} & \frac{1}{2}N\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{-2}{\left(x^2 + h_1^2\right)^{1/2}} + \frac{1}{\left[(x-a)^2 + h_2^2\right]^{1/2}} + \frac{1}{\left[(-x-a)^2 + h_2^2\right]^{1/2}}\right\}\cos(wx)\,dx \; + \\ & \frac{1}{2}N\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\left[(x-a)^2 + h_2^2\right]^{1/2}} - \frac{1}{\left[(-x-a)^2 + h_2^2\right]^{1/2}}\right\}\sin(wx)\,dx \end{aligned} \tag{7.202}$$

denklemi yardımıyla verilir. (7.202), Erdelyi (1954) tümlev çizelgeleri (Bkz Ek A) kullanılarak çözüldüğünde birinci terim,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-2}{\left(x^2 + h_1^2\right)^{1/2}}\cos(wx)\,dx = -4\,K_0(wh_1) \tag{7.203}$$

olarak bulunur. Ancak ikinci terimin çözümü için,

$$x - a = u \quad , \quad x = u + a \quad , \quad dx = du$$

dönüşümü yapıldığında ikinci terim,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(wx)}{\left[(x-a)^2 + h_2^2\right]^{1/2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos[w(u+a)]}{\left[u^2 + h_2^2\right]^{1/2}} du \qquad (7.204)$$

şeklinde ifade edilebilir.

$$\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)$$

özelliğinden faydalanılarak, (7.204) ortogonallik koşulları gözönünde bulundurularak çözüldüğünde,

$$\cos(wa)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(wu)}{\left[u^2 + h_2^2\right]^{1/2}} du = 2\cos(wa)K_0(wh_2) \qquad (7.205)$$

elde edilir. Üçüncü terim ise,

$$-(x+a) = -u \quad , \quad x = u - a \quad , \quad dx = du$$

dönüşümü yardımıyla (7.204) bağıntısına özdeş olur. Bu terimin çözümünden de,

$$\cos(wa)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(wu)}{\left[u^2 + h_2^2\right]^{1/2}} du = 2\cos(wa)K_0(wh_2) \qquad (7.206)$$

bulunur. Burada tümlevin ikinci kısmının çözümü

$$\sin(A-B) = \sin(A)\cos(B) - \sin(B)\cos(A)$$

özelliği kullanılarak,

$$\sin(wa)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(wu)}{\left[u^2 + h_2^2\right]^{1/2}} du = 2\sin(wa)K_0(wh_2) \qquad (7.207)$$

$$\sin(wa)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(wu)}{\left[u^2 + h_2^2\right]^{1/2}} du = 2\sin(wa)K_0(wh_2) \qquad (7.208)$$

§ (u2 + h22)1/2
-ì

şeklinde elde edilir. Burada $K_0(wh)$ Modifiye Bessel işlevi olup, özellikleri Ek A da ayrıntılı olarak verilmiştir.

(7.202) bağıntısı, (7.203), (7.205), (7.206), (7.207) ve (7.208) yardımıyla yeniden düzenlenirse,

$$V(w) = -2\,N\,K_0(wh_1) + 2\,N\cos(wa)K_0(wh_2) + 2\,N\sin(wa)K_0(wh_2) \qquad (7.209)$$

dönüşüm denklemi bulunur. (7.198) No lu V(x) gerilim bağıntısının FD alınarak bulunan dalgasayısı ortamı denklemi ise,

$$V(w) = -2\,N\,K_0(wh_1) + 2\,N\cos(wa)K_0(wh_2) - j2\,N\sin(wa)K_0(wh_2) \qquad (7.210)$$

dır.

Buradan güç spektrumu E(w), gerek (7.209) gerekse (7.210) bağıntıları kullanılarak,

$$E(w) = 4\,N^2\left[K_0^2(wh_1) - 2\,K_0(wh_1)K_0(wh_2)\cos(wa) + K_0^2(wh_2)\right] \qquad (7.211)$$

şeklinde bulunur.

Bilindiği gibi kosinüs işlevi (-1,+1) aralığında değişen bir işlevdir. (7.211) bağıntısındaki bu teriminin etkisini incelemek amacıyla $K_0(wh_1)$, $K_0(wh_2)$ ve E(w), w nın farklı değerleri için hesaplanmıştır (Çizelge 7.6). Çizelge 7.6 incelendiğinde $K_0(wh_1)$ ile $K_0(wh_2)$ nın çarpımının alabileceği en büyük değer yaklaşık olarak 0.0006 dır. Bu değerin cos(wa) nın alabileceği en büyük değerle (±1) çarpımının, E(w) üzerinde önemli bir etkisi olmayacağından bu terim yaklaşık sıfır olarak kabul edilebilir.

Bu yaklaşım kullanılarak güç spektrumu bağıntısı (7.211) düzenlenecek olursa,

$$E(w) = 4\,N^2\left[K_0^2(wh_1) + K_0^2(wh_2)\right] \qquad (7.212)$$

şeklini alır. (7.195) yaklaşımı kullanılarak (Abramowitz ve Stegun 1972) h_1 ve h_2 nin farklı değerleri için hesaplanan $K_0(wh_1)$ ile $K_0(wh_2)$ nin değişimi Çizelge 7.6 da verilmiştir. Çizelge 7.6 dan görüldüğü gibi (w) nın dolayısı ile (wh) ın değişimine bağlı olarak $K_0(wh_1)$ ve $K_0(wh_2)$ hesaplandığında, $K_0(wh_2)$ nin $K_0(wh_1)$ e oranla oldukça küçük olduğu ve de güç spektrumu üzerindeki etkisinin oldukça az olduğu görülür. Dolayısı ile (7.212) bağıntısında $C=4N^2$ ile tanımlanıp logaritmaları alındığında,

h_1=50 m h_2=50 m α=20^O L=100 m				
w	**$K_0(wh_1)$**	**$K_0(wh_2)$**	**$K_0(wh_1)$* $K_0(wh_2)$**	**$K_0(wh_1)/K_0(wh_2)$*100**
0.05	0.06505	0.00906	$5.9\ 10^{-4}$	13.93
0.1	0.0377	$9.5\ 10^{-5}$	$3.6\ 10^{-7}$	2.52
0.15	$2.5\ 10^{-4}$	$1.1\ 10^{-6}$	$2.8\ 10^{-10}$	0.45
0.2	$1.8\ 10^{-8}$	$1.6\ 10^{-8}$	$2.8\ 10^{-11}$	0.08
0.25	$1.3\ 10^{-6}$	$2.0\ 10^{-10}$	$2.7\ 10^{-14}$	0.15

h_1=50 m h_2=114 m α=40^O L=100 m				
w	**$K_0(wh_1)$**	**$K_0(wh_2)$**	**$K_0(wh_1)$* $K_0(wh_2)$**	**$K_0(wh_1)/K_0(wh_2)$*100**
0.05	0.06505	$1.7\ 10^{-3}$	$1.1\ 10^{-4}$	2.6
0.1	0.0377	$4.1\ 10^{-6}$	$1.5\ 10^{-7}$	0.11
0.15	$2.5\ 10^{-4}$	$1.1\ 10^{-8}$	$2.5\ 10^{-12}$	$4.0\ 10^{-3}$
0.2	$1.8\ 10^{-8}$	$3.0\ 10^{-11}$	$5.4\ 10^{-16}$	$1.6\ 10^{-4}$
0.25	$1.3\ 10^{-6}$	$9.0\ 10^{-11}$	$1.2\ 10^{-16}$	$7.0\ 10^{-3}$
h_1=50 m h_2=146 m α=75^O L=100 m				
w	**$K_0(wh_1)$**	**$K_0(wh_2)$**	**$K_0(wh_1)$* $K_0(wh_2)$**	**$K_0(wh_1)/K_0(wh_2)$*100**
0.05	0.06505	$3.0\ 10^{-4}$	$2.0\ 10^{-4}$	0.46
0.1	0.0377	$9.8\ 10^{-8}$	$3.6\ 10^{-10}$	$2.5\ 10^{-3}$
0.15	$2.5\ 10^{-4}$	$7.0\ 10^{-11}$	$1.7\ 10^{-14}$	$1.75\ 10^{-12}$
0.2	$1.8\ 10^{-8}$	$6.0\ 10^{-14}$	$1.08\ 10^{-18}$	$1.08\ 10^{-16}$
0.25	$1.3\ 10^{-6}$	$2.0\ 10^{-17}$	$2.6\ 10^{-23}$	$1.53\ 10^{-21}$

Çizelge 7.6 $K_0(wh_1)$ ve $K_0(wh_2)$ nin w ya bağlı olarak değişimi

$$\mathrm{Ln}\,E(w) = \mathrm{Ln}\,C + 2\,\mathrm{Ln}\,K_0(wh_1) \tag{7.213}$$

$$\mathrm{Ln}\,E(w) = \mathrm{Ln}\,C + 2\,\mathrm{Ln}\left[\frac{1.253}{(wh_1)^{1/2}\,e^{wh_1}}\right] \tag{7.214}$$

olarak yazılabilir. Bu ise

$$\mathrm{Ln}\,E(w) = \mathrm{Ln}(C) + 2\,\mathrm{Ln}(1.25) - \mathrm{Ln}(wh_1) - 2wh_1 \qquad 7.215)$$

şeklinde yazılıp, terimler incelendiğinde eğime olan temel etkinin $-2wh_1$ teriminden kaynaklandığı, (7.198) bağıntısı ile derinlik bulma işleminin burada da başarı ile yapılabilirliği Şekil 7.54 ve Çizelge 7.7 den açıkça görülebilmektedir.

POLARLANMA AÇISI (α)	GERÇEK DERİNLİK (m)	HESAPLANAN DERİNLİK (m)	HATA ORANI %
20^0	100	97.6	2.4
40^0	100	97.6	2.4
70^0	100	97.6	2.4

40^0	50	49.0	2.0
40^0	100	97.6	2.4
40^0	150	145.6	3.0

POLARLANMA AÇISI (α)	**GERÇEK DERİNLİK (m)**	**HESAPLANAN DERİNLİK (m)**	**HATA ORANI %**
20^0	100	97.2	2.8
40^0	100	97.2	2.8
70^0	100	97.2	2.8
40^0	50	48.8	2.4
40^0	100	97.2	2.8
40^0	150	145.0	3.0

Çizelge 7.7 Küre modeline ait derinlikler ve hata oranları (potansiyel anomalisi)

Ödevler

1. $f(t) = \cos(wt)$ ise

$f_+(t) = \cos(wt) + j\sin(wt) = e^{jwt}$

olduğunu gösteriniz.

2. En genel halde

$$f(t) = A(t)\cos[\theta(t)]$$

olarak verilir. Burada, A(t) işlevin zarfı, θ(t) evre işlevi, $w_i = d\theta(t)/dt$ anlık frekanstır. $\hat{f}(t)$ analitik bir izdir. Bunun zarfı ile evresi

$$A(t) = \frac{g(t)}{\cos\left\{\tan^{-1}\left[f(t)/\hat{f}(t)\right]\right\}}$$

$$\phi(t) = \tan^{-1}\left[\frac{\hat{f}(t)}{f(t)}\right]$$

denklemleri ile tanımlanmıştır. Yukarıdaki bağıntıları kullanarak,

$$f(t) = A\sin(wt)$$

biçiminde verilen modüle edilmiş f(t) sinyalini (A ve w birer sabit olmak üzere bindirilmiş sinyalin genliği ve açısıdır) bu   lunuz.

3. $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$

sinyalinin anlık frekansını bulunuz.

4. f(t) tek yanlı ise

$$\int_{-\infty}^{\infty} [G(w)]^2\,dw = \int_{-\infty}^{\infty} S(w)dw$$

ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [G(w)]^2\,dw$$

olduğunu gösteriniz.

5. Örnek 2 de SP de kürenin potansiyelinden yararlanarak güç spektrumunun bulunması verilmiştir. Aynı sorunu bu kez de kürenin elektrik alan değerlerini kullanarak çözünüz.

6. SP de çubuk modeli için elektrik alandan giderek güç spektrumunu bulunuz.