BÖLÜM 6

DÜRTÜ (DIRAC IMPULSE) İŞLEVİ

6.1 DÜRTÜ İŞLEVİNİN TANIMI

Tekil sinyallerin (Bkz Bölüm 5) genelleştirilmiş FD leri, limit durumunda dönem sonsuza giderken bulunur. Bu sırada dürtü işlevi [δ(t)] kullanılır.

Dürtü işlevi, altındaki alanı 1 olan bir diktörtgen dalganın, dalga genişliği sıfıra giderken limiti veya birim basamak işlevi δ(t) nin türevi olarak düşünülebilir. δ(t) nin klasik işlevlerle hiçbir ilgisi yoktur. δ(t); aşağıdaki gibi tanımlanır.

1. $\delta(t) = 0 \qquad t \neq 0$
2. $\delta(t) = \infty \qquad t = 0$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$ (6.1)

veya üç özellik birleştirilirse;

$$\delta(t) = \begin{cases} t = 0 & \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \\ t \neq 0 & \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 0 \end{cases} \tag{6.2}$$

elde edilir. (6.1) eya (6.2) denklemi ile verilen işleve "dürtü işlevi" denir.

(6.1) veya (6.2) denklemleri ile verilen tanımdaki en büyük güçlük, verilen üç koşulun tutarlı olmamasıdır. Herhangi bir işlev bu üç koşulu birlikte sağlayamaz. Tümlev tanımından giderek $t = 0$ dışında her yerde sıfır ve tümlevi 1 olan işlevin olmayacağı söylenebilir. Ancak, δ(t) işlevi bir kavram olarak kabul edilir. Böylece birçok soruna doğru ve kolay çözüm bulunabilir. Matematiksel olarak δ(t) işlevinin ayrıntılı incelemesi **"DAĞILIM KURAMI"** nın konusudur. Burada dağılım işlevlerine çok az değinilecektir. Kısacası δ(t) işlevi hem $t = 0$ da sonsuz, $t \neq 0$ da ise sıfır değeri olan ve aynı zamanda altında kalan alanın sonlu değerde olduğu bir işlevdir. Ama böyle bir işlev olamaz.

Benzer şekilde $A\,\delta(t), t = 0$ noktasına uygulanmış genliği A olan bir dürtü işlevini ve $A\,\delta(t - t_0)$ da, $t = t_0$ noktasına uygulanmış, genliği A olan bir dürtü işlevini gösterir (Şekil 6.1).

Genellikle, dürtü işlevi "DAĞILIM İŞLEVLERİ" denen $\phi_n(t)$ işlevlerinin genelleştirilmiş anlamdaki limitleri ile bilinir.

$$\delta(t) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(t) \tag{6.3.1}$$

Benzer biçimde birim basamak işlevinin türevi olarak ta tanımlanabilir.

$$\delta(t) = \frac{d\,h(t)}{dt} \tag{6.3.2}$$

h(t): birim basamak işlevi

$\phi_n(t)$, dağılım işlevlerinin sağlaması gereken koşullar aşağıda verilmektedir.

a. $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(t)dt = 1$

b. Her $t \neq 0$ için $\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = 0$

c. $\phi_n(t)$ işlevlerinin her mertebeden türevleri tanımlı olmalıdır.

Örnek 6.1

$$\phi_n(t) = n\,\pi(nt) \tag{6.5}$$

ile verilen işlevin bir dağılım işlevi olduğunu gösteriniz.

(6.5) bağıntısı ile tanımlanan dikdörtgen dalga işlevi aynı zamanda bir dağılım işlevidir. Çünkü $\phi_n(t)$, işlevi (6.4) ile verilen tüm koşulları sağlar. Bu nedenle;

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = \delta(t) \tag{6.6}$$

olacaktır. Bu limit işlemi Şekil 6.2 de adım adım gösterilmiştir.

Şekil 6.2 de görüldüğü gibi dikdörtgen dalga limitte $\delta(t)$ ye yaklaşır. Bu nedenle bir dağılım işlevidir. Aşağıda verilen işlevler de limitte dürtü işlevine yaklaştığından onlar da birer dağılım işlevidir.

$$\delta(t) = \lim_{n\to\infty} \begin{matrix} n\,e^{(-nt)^2} \\ n\sin c(nu) \\ n\sin c^2(nu) \end{matrix} \tag{6.7}$$

6.2 DÜRTÜ İŞLEVİNİN ÖZELLİKLERİ

$\phi_n(t)$; herhangi bir işlev olma koşulu ile,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\,\delta(t - t_0)dt = \phi(t = t_0) \tag{6.8}$$

kaymanın olmaması durumunda $(t_0 = 0)$ ise

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\,\delta(t)\,dt = \phi(t=0) \tag{6.9}$$

şeklini alır. Dürtü işlevinin türevi ise;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n\delta(t-t_0)}{dt^n}\phi(t)\ dt = (-1)^n\left[\frac{d^n\phi(t_0)}{dt^n}\right]_{t=t_0} \tag{6.10}$$

denklemiyle verilir. Ayrıca;

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{jwt}\,dw \tag{6.11}$$

özelliği de vardır.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\,dt = 1 \tag{6.12a}$$

zaman ölçekleme özelliği ise:

$$\delta(at) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta[a(t-t_0)]dt = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)\delta(t-t_0)dt = \frac{1}{|a|}\phi(t_0) \quad a \neq 0 \tag{6.12b}$$

dır.

Not: $\delta(t)$ işlevi yerine birim basamak işlevinin türevi olan 6.3.2 denklemi kullanılarak bağıntılar geliştirilebilir.

6.2.1 Dürtü ve t_0 kadar ötelenmiş dürtü işlevinin Fourier dönüşümü

FD bağıntısı;

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-jwt}\,dt$$

dır. Bu bağıntıda $f(t)$ yerine $\delta(t)$ işlevi kullanılırsa;

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-jwt}\,dt$$

elde edilir. Bu bağıntı, (6.9) ile karşılaştırıldığında $\phi(t)$ işlevinin e^{-jwt} ye özdeş olduğu görülür. Öyleyse,

$$F(w) = \phi(t = 0) = 1$$

[(6.1) veya (6.2) den)] elde edilir. Yani dürtü işlevinin FD 1 dir (Şekil 6.3).

$$\Im[\delta(t)] = 1 \qquad (6.12c)$$

Aynı dürtü işlevinin FD (6.5), (6.6) ve dikdörtgen işlevinden yararlanılarak ta elde edilebilir.

$$\delta(t) = \lim_{n\to\infty} n\pi\left(\frac{t}{1/n}\right)$$

$$\Im[\delta(t)] = \Im\left[\lim_{n\to\infty} n\pi\left(\frac{t}{1/n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty} \sin c(nf) = 1$$

$$\Im[\delta(t)] = 1 \qquad (6.12d)$$

Not: Dikdörtgen dalganın FD sinc işlevidir (Bkz Bölüm 5).

(6.12c) denkleminin şekilsel gösterimi Şekil 6.4 te verilmiştir.

(6.8) bağıntısı kullanılarak "t_0" kadar ötelenmiş dürtü işlevinin $[\delta(t - t_0)]$ FD bulunabilir.

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-jwt}\, dt = e^{-jwt_0} \qquad (6.13)$$

$$\Im[\delta(t - t_0)] = e^{-jwt_0} \qquad (6.14)$$

Aynı işlem (6.8) ve (6.12c) denklemleri kullanılarak ta elde edilebilir.

Özet olarak aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$\begin{aligned} \delta(t - t_0) &\leftarrow \Im \rightarrow e^{-jwt_0} \\ \delta(t + t_0) &\leftarrow \Im \rightarrow e^{jwt_0} \end{aligned} \qquad (6.14)$$

Bakışım kuramı kullanılarak;

$$\begin{aligned} 1 &\leftarrow \Im \rightarrow 2\pi\,\Delta(w) \\ e^{-jwt_0} &\leftarrow \Im \rightarrow 2\pi\,\Delta(w - w_0) \\ e^{jwt_0} &\leftarrow \Im \rightarrow 2\pi\,\Delta(w + w_0) \end{aligned} \qquad (6.15)$$

yazılabilir. (6.15) denklemlerinde;

$$\Delta(w) = \Im[\delta(t)]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\,dt = 1$$

dir. Ötelenmiş dürtü işlevinin genlik evre spektrumları ise; (6.14) denklemlerinden,

$$\Delta(w) = \Im[\delta(t - t_0)] = e^{-jwt_0}$$
$$\Delta(w) = \cos(wt_0) - j\sin(wt_0)$$

Genlik spektrumu;

$$|\Delta(w)| = [\cos^2(wt_0) - j\sin^2(wt_0)]^{1/2} = 1 \qquad (6.16)$$

Evre spektrumu;

$$\theta(w) = \tan^{-1}\left[\frac{\sin(wt_0)}{\cos(wt_0)}\right] = \tan^{-1}[\tan(wt_0)]$$
$$\theta(w) = t_0 w \qquad (6.17)$$

olarak verilir (Şekil 6.5). Gerek dürtü işlevleri ve gerekse de diğer FD yöntemleri kullanılarak bazı özel işlevlerin FD leri Çizelge 6.1 de verilmiştir.

$f(t)$	$F(w)$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a + jw}$
$t\,e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(a + jw)^2}$
$\lvert t \rvert$	$\frac{2}{w^2}$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\,\delta(w)$
$u(t)$	$\frac{1}{jw}\pi\,\delta(w)$
$\cos(w_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2}[\delta(w - w_0) + \delta(w + w_0)] + \frac{jw}{w_0^2 - w^2}$
$\sin(w_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2j}[\delta(w - w_0) + \delta(w + w_0)] + \frac{w_0}{w_0^2 - w^2}$
$\cos(w_0 t)$	$\pi[\delta(w - w_0) + \delta(w + w_0)]$
$\sin(w_0 t)$	$j\pi[\delta(w - w_0) + \delta(w + w_0)]$
$e^{-a\lvert t \rvert}$	$\frac{2a}{a^2 + w^2}$
$e^{-t^2/2\sigma^2}$	$\sigma\sqrt{2\pi}\,e^{-\sigma^2 w^2/2}$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t - kT)$	$\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(w - \frac{2\pi}{T}k\right)$

$\mathrm{sgn}(t)$	$2 / jw$

Çizelge 6.1 Bazı özel işlevlerin FD leri