BÖLÜM 4

KARMAŞIK FOURİER SERİLERİ

4.1 KARMAŞIK FOURİER SERİSİNİN ELDE EDİLMESİ

FS de trigonometrik işlevler yerine karmaşık işlevler kullanılarak hesaplamalar daha basitleştirilebilir.

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(nw_0 t) + b_n \sin(nw_0 t)\right] \tag{4.1}$$

Euler denklemlerinden,

$$\cos(nw_0 t) = \frac{1}{2}\left[\exp(jnw_0 t) + \exp(-jnw_0 t)\right] \tag{4.2}$$

$$\sin(nw_0 t) = \frac{1}{2j}\left[\exp(jnw_0 t) - \exp(-jnw_0 t)\right] \tag{4.3}$$

bağıntıları (4.1) de yerine yazılır.

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \frac{1}{2}\left[\exp(jnw_0 t) + \exp(-jnw_0 t)\right] + b_n \frac{1}{2j}\left[\exp(jnw_0 t) - \exp(-jnw_0 t)\right]\right\} \tag{4.4}$$

(4.4) bağıntısının içindeki parantezler açılıp yeniden düzenlenirse

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}(a_n - jb_n)\exp(jnw_0 t) + \frac{1}{2}(a_n + jb_n)\exp(-jnw_0 t)\right] \tag{4.5}$$

elde edilir. (4.5) bağıntısında

$$C_0 = \frac{a_0}{2} \quad , \quad C_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad , \quad C_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} \tag{4.6}$$

konursa,

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n \exp(jnw_0 t) + C_{-n} \exp(-jnw_0 t)\right]$$

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(jnw_0 t) + \sum_{n=-1}^{\infty} C_n \exp(-jnw_0 t)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(jnw_0 t) \tag{4.7}$$

karmaşık FS bulunur. C_0, C_n, C_{-n} katsayıları,

$$C_0 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt \tag{4.8}$$

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{T}\left[\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(nw_0t)dt - j\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(nw_0t)dt\right]$$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)[\cos(nw_0t) - j\sin(nw_0t)]dt$$

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\exp(-jnw_0t)dt \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2 \tag{4.9}$$

aynı şekilde n<0 için

$$C_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\exp(jnw_0t)dt \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2 \tag{4.10}$$

elde edilir. (4.9) ve (4.10) bağıntıları birbirlerinin karmaşık eşleniğidir (conjugate). Yani:

$$C_{-n} = C_n^* \tag{4.11}$$

dir.

Not: Karmaşık sayılara ait anımsatmalar

1. Genlik (mod) ve evresi (faz, arg) gerçel (a) ve sanal (b) bileşenlerden oluşmuş bir "z" karmaşık sayısı (Şekil 4.1) $z = a + jb$ olarak gösterilir. Şekil 4.1 den

$$a = r\cos(\phi)$$
$$b = r\sin(\phi)$$

dır. Burada "r" ye karmaşık sayının genliği denir. "r"; karmaşık sayı olan "z" nin mutlak değerine eşittir. Mutlak değer modül olarak tanımlandığından "mod z" şeklinde de gösterilebilir. Yani "r"

$$r = \left(a^2 + b^2\right)^{1/2} = |a + jb| = |z| = \mathrm{mod}\, z$$

yazılabilir.

ϕ ise evre olarak tanımlanır. Şekil 4.1 den

$$\tan(\phi) = \frac{b}{a} \quad , \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

elde edilir. Aynı zamanda "z" karmaşık sayısının argümanı olarak ta belirtilebilir. Yani $\phi = \arg(z)$ olarak yazılır. O zaman evre bağıntısı;

$$\phi == \arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

durumuna dönüşür. Şekil 4.1 de evre açısının dönme yönü, saatin dönme yönü ile ters olarak alınmıştır. Ancak Fourier dönüşümlerinde söz konusu dönme yönü saat yönü olarak alınır (Şekil 4.2). Bu durumda, $\phi = 2\pi - \phi$ olarak alınmalıdır.

$$\tan(\phi) = \tan\left(2\pi - \frac{b}{a}\right)$$
$$\tan\left(2\pi - \frac{b}{a}\right) = -\tan\left(\frac{b}{a}\right)$$
$$-\tan(\phi) = \tan(-\phi)$$

özellikleri kullanılarak

$$\tan(\phi) = \tan\left(-\frac{b}{a}\right)$$
$$\phi = \tan^{-1}\left(-\frac{b}{a}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

elde edilir. Evre $0 \le \phi \le 2\pi$ veya $-\pi \le \phi \le \pi$ olmak zorundadır. Burada verilen "r" ve "ϕ" aynı zamanda kutupsal koordinatlardır. Eğer "z" sayısı birçok karmaşık vektörlerden oluşuyorsa

$$z = a_n + jb_n$$

yazılır.

2. Karmaşık eşlenik: $z = a_n + jb_n$ şeklinde tanımlanan karmaşık bir sayının eşleniği $z = a_n - jb_n$ dir. z sayısına ait vektörler Şekil 4.1 de verilmektedir. Şekilden de görüldüğü gibi karmaşık eşlenik vektörlerin toplamı;

$$[a + jb] + [a - jb] = 2a$$

çarpımları ise;

$$[a + jb][a - jb] = a^2 + b^2 = [r\exp(j\phi)][r\exp(-j\phi)] = r^2$$

dir.

$f(t)\exp(-jnw_0 t)$ işlevi "T" dönemine sahip olduğundan

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\exp(-jnw_0t)dt \qquad (4.12)$$

olarak gösterilir. C_n katsayısının a_n ve b_n cinsinden değeri,

$$|C_n| = \left(a_n^2 + b_n^2\right)^{1/2} \qquad (4.13)$$

dır. Ayrıca işin içine evre açısı da katıldığında (evre yoksa $\phi_n=0$ dır),

$$C_n = |C_n|\exp(j\phi_n) \quad , \quad C_{-n} = C_n^* = |C_n|\exp(-j\phi_n) \qquad (4.14)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(-\frac{b_n}{a_n}\right) \qquad (4.15)$$

bulunur. Evrenin olmaması durumunda ($\phi_n=0$), $C_0=(1/2)a_0$ olarak elde edilir ve gerçeldir (doğru akım bileşeni).

4.2 KARMAŞIK FOURİER SERİSİNİN ORTOGONALLİĞİ

$\theta_n(t) = \exp(jnw_0t)$ ve $\theta_m(t) = \exp(jmw_0t)$ ile verilsin

$$\theta_m(t) = \cos(mw_0t) + j\sin(mw_0t)$$

$$\theta_m^*(t) = \exp(-jmw_0t) = \cos(mw_0t) - j\sin(mw_0t)$$

$$\int_a^b \theta_n(t)\theta_m^*(t)dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ r_n & n = m \end{cases}$$

dir.

Örnek 4.1

Aşağıda bağıntısı verilen testere dişi (Şekil 4.3) işlevini karmaşık FS ne açınız.

$$f(t) = \frac{A}{T}t \qquad 0 < t < T \qquad f(t+T) = f(t)$$

Bu işlevin karmaşık FS;

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(jnw_0t) \quad , \quad w_0 = \frac{2\pi}{T}$$

bağıntılarından yararlanarak,

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\exp(-jnw_0 t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{A}{T} t\,\exp(-jnw_0 t)dt = \frac{A}{T^2}\int_0^T t\,\exp(-jnw_0 t)dt$$

$$t = u \qquad dv = \exp(-jnw_0 t)dt$$

$$dt = du \qquad v = -\frac{1}{jnw_0 t}\exp(-jnw_0 t)$$

dönüşümleri kullanılarak

$$C_n = \frac{A}{T^2}\left[-\frac{1}{jnw_0}\left|t\,\exp(-jnw_0 t)\right|_{t=0}^{T} - \frac{1}{n^2 w_0^2}\exp(-jnw_0 t)\Big|_{t=0}^{T}\right]$$

$$C_n = \frac{A}{T^2}\left\{-\frac{1}{jnw_0}\exp(-jn2\pi) - \left[\frac{1}{n^2 w_0^2}\exp(-jn2\pi)\right]\right\}$$

Not: $\exp(-jn2\pi) = \cos(jn2\pi) - j\sin(jn2\pi) = 1$ (n, tamsayı)

$$C_n = -\frac{A}{T}\frac{1}{jnw_0} = -\frac{A}{T}\frac{1}{jn2\pi/T} = \frac{A}{jn2\pi} = j\frac{A}{n2\pi}$$

Not: $\exp(j\alpha) = \cos(\alpha) + j\sin(\alpha)$

$$\begin{bmatrix} \sin(\alpha) = 1 & \text{yapan deg er} \\ \cos(\alpha) = 0 & \text{yapan deg er} \end{bmatrix} \qquad \alpha = \pi/2 \quad \text{dır.}$$

$\alpha = \pi/2$ için,
$\exp(j\pi/2) = \cos(\pi/2) + j\sin(\pi/2)$, $\exp(j\pi/2) = j$

bulunur. O zaman

$$C_n = j\frac{A}{2n\pi} = \frac{A}{2n\pi}\exp(j\pi/2)$$

yazılabilir.

Yani

$$C_n = \frac{A}{2n\pi}\exp(j\pi/2)$$

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{A}{T}t\,dt = \frac{A}{2}$$

olarak bulunur. FS ise,

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(jnw_0 t)$$

$$f(t) = \frac{A}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A}{2n\pi} \exp(j\pi/2)\exp(jnw_0 t)$$

$$f(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} \exp\{j[(\pi/2) + nw_0 t]\}$$

elde edilir.

Örnek 4.2
Birinci örnekteki sonuçları kullanarak FS nin trigononometrik şeklini yazınız.

(4.6) bağıntıları:

$$C_0 = \frac{a_0}{2} \quad , \quad C_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad , \quad C_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}$$

dır. Buradan

$$C_0 = \frac{A}{2} \rightarrow \frac{1}{2} a_0 = \frac{A}{2} \quad , \quad a_0 = A$$

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{A}{2n\pi} \exp(j\pi/2) \quad , \quad a_n = 0$$

$$\frac{1}{2}(-jb_n) = \frac{A}{2n\pi} \exp(j\pi/2) \quad , \quad j = \exp(j\pi/2)$$

yazılabilir. Buradan da aşağıdaki bağıntılar bulunur.

$$\frac{1}{2}[\exp(j\pi/2)]b_n = \frac{A}{2n\pi} \exp(j\pi/2) \quad , \quad b_n = \frac{-A}{n\pi}$$

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nw_0 t) + b_n \sin(nw_0 t)]$$

$$f(t) = \frac{1}{2} A + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-A}{n\pi} \sin(nw_0 t) = \frac{1}{2} A - \frac{A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nw_0 t)$$

$$f(t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi}\left[\sin(w_0 t) + \frac{1}{2}\sin(2w_0 t) + \frac{1}{3}\sin(3w_0 t) + \ldots\ldots\ldots\ldots\right]$$

4.3 BİR İŞLEVİN KARMAŞIK FREKANS SPEKTRUMU

(4.7) bağıntısından elde edilen "C_n" karmaşık katsayısının genlikleri bağımsız değişken olan "w" açısal frekansına göre çeşitli "n" değerleri için çizilirse "f(t)" dönemsel işlevinin genlik spektrumu elde edilir. Eğer "Cn" değerleri "w" açısal frekansına göre değil de "ϕ_n" evre açısına göre çizilirse "f(t)" işlevinin evre spektrumu elde edilir. "n" indisleri tam sayısal değerler alacağından genlik ve evre spektrumları "nw_0" ayrık değerlerinde (binlerde) görülür.

Bu nedenle elde edilen spektrumuna ayrık frekans spektrumu veya çizgisel spektrum ismi verilir.

Örnek 4.3

Aşağıda verilen yaklaşım ile tanımlanan büyüklüğü A, genişliği d olan dönemli dikdörtgen dalganın (Şekil 4.4) frekans spektrumunu bulunuz.

$$f(t) = \begin{cases} A & -d/2 < t < d/2 \\ 0 & -T/2 < t < -d/2 \quad \text{ve} \quad d/2 < t < T72 \end{cases}$$

(4.9) dan,

$$C_n = \frac{A}{T}\int_{-d/2}^{d/2} \exp(-jnw_0 t)dt = \frac{A}{T}\frac{-1}{jnw_0}\exp(-jnw_0 t)\Big|_{t=-d/2}^{d/2}$$

$$C_n = \frac{A}{T}\frac{1}{jnw_0}\left[\exp\left(jnw_0\frac{d}{2}\right) - \exp\left(-jnw_0\frac{d}{2}\right)\right]$$

Euler bağıntılarından $2j\sin(\alpha) = \exp(j\alpha) - \exp(-j\alpha)$ dır. Buradan,

$$C_n = \frac{A}{T}\frac{1}{jnw_0}2j\sin\left(jnw_0\frac{d}{2}\right) = \frac{A}{T}\frac{2\sin(nw_0 d/2)}{nw_0}$$

bulunur. Sağ taraf $(nw_0d/2)/(nw_0d/2)$ ile çarpılıp,

$$C_n = \frac{A}{T}\frac{2\sin\left(\frac{nw_0 d}{2}\right)}{nw_0}\cdot\frac{\frac{nw_0 d}{2}}{\frac{nw_0 d}{2}} = \frac{A}{T}\frac{2\sin\left(\frac{nw_0 d}{2}\right)}{\frac{nw_0 d}{2}}\cdot\frac{\frac{nw_0 d}{2}}{nw_0 d}$$

$$C_n = \frac{A}{T}\frac{2\sin\left(\frac{nw_0 d}{2}\right)}{\frac{nw_0 d}{2}}.d$$

veya $w_n = nw_0$ konulursa

$$C_n = \frac{Ad}{T}\frac{\sin\left(\frac{w_n d}{2}\right)}{\frac{w_n d}{2}}$$

elde edilir. (4.16) da $w_0 = 2\pi/T$ yazılırsa,

$$C_n = \frac{Ad}{T}\frac{\sin\left(\frac{n\pi d}{T}\right)}{\frac{n\pi d}{T}} \qquad (4.17)$$

ulaşılır. (4.16) ve (4.17) nin sağ tarafları "sinc" işlevi olarak bilinir. Bu nedenle "sinc" işlevi kullanılarak

$$C_n = \frac{Ad}{T}\sin c\left(\frac{nw_0 d}{2}\right)$$
(4.18)

yazılabilir. (4.18) kullanılarak f(t) izinin karmaşık FS açılımı;

$$C_n = \frac{Ad}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sin c\left(\frac{nw_0 d}{2}\right)\exp\left(jnw_0 t\right)$$
(4.19)

olarak yazılır. Son dört bağıntıda evre spektrumu sıfır ve "C_n" gerçeldir. "nw_0" bağımsız değişkenine göre "C_n" çizildiğinde ayrık frekans spektrumu elde edilir. Söz konusu problemde ayrık frekans spektrumunu elde etmek için d ve T ye değerler vermek gerekir. Örneğin; d=1/20, T=1/4 sn için bu hesaplamalar yapılsın.

$$w_n = nw_0 = n\frac{2\pi}{T} = n\frac{2\pi}{1/4} = n\,8\pi \quad , \quad \frac{n\pi d}{T} = n\pi\frac{1/20}{1/4} = \frac{n\pi}{5} \quad , \quad \frac{Ad}{T} = \frac{A}{5}$$

olarak bulunur. "C_n" in hesaplanması ise

$$C_n = \frac{A}{T}\frac{\sin\left(\frac{nw_0 d}{2}\right)}{\frac{nw_0 d}{2}} = \frac{A}{5}\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{5}\right)}{n\frac{\pi}{5}}$$

denklemlerinden yararlanılarak yapılır (Çizelge 4.1). Spektrumun çizilebilmesi için spektrum ortamındaki örnekleme aralığının, her bir "w_n" binindeki "C_n" değerlerinin bulunması gerekir.

n	0	+1	+2	+3	+4	+5
w_n	0	$+8\pi$	$+16\pi$	$+24\pi$		$+40\pi$
C_n	A/5	(A/π) sin(36)				0 (A/π)sin(π)

Çizelge 4.1 “C_n” in hesaplanması

a. Spektrum ortamındaki örnekleme aralığı ve binlerin yeri:

$$\Delta w = 0, \pm 8\pi, 16\pi$$

aynı örnekleme aralığı n=1 için $w_n=nw_0=1.8\pi$ den de bulunabilir. Binlerin yerleri ise; $w_n=nw_0$ da n=0,±1,±2,... ve $w_0=8\pi$ değerlerinin konmasıyla elde edilir.

$$\Delta w = w_1 - w_0 = 8\pi$$

b. "C_n" in sıfır olduğu yer bulunarak sinc işlevinin sıfırları hesaplanır. Bunun için sinc işlevinin köklerinin bulunması gerekir.

$$C_n = 0$$

$$\sin\left(\frac{nw_0 d}{2}\right) = 0 \qquad \alpha = \sin\left(\frac{nw_0 d}{2}\right) \sin(\alpha) = 0 \quad \text{olmalıdır.}$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{5}\right) = 0 \qquad \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{n\pi}{5}\right) \sin(\alpha) = 0 \qquad n = 5$$

$$\alpha = \sin\left(\frac{5\pi}{5}\right) = \sin(\pi) = 0$$

bulunur. Yani n=5 veya $w_n=nw_0=5.8\pi=40\pi$ değerinde $C_n=0$ dır.

c. n=0 veya $w_0=0$ daki "C_n" değeri bulunmalıdır.

$$C_n = \frac{A}{T} \frac{\sin\left(\frac{nw_0 d}{2}\right)}{\frac{nw_0 d}{2}} = \frac{A}{T} \frac{\sin(0)}{0} = \text{belirsiz}$$

L'Hospital kuralına göre belirli duruma sokulursa:

$$C_n = \frac{A}{T} = \frac{A}{5}$$

dır. Öyleyse n=0 veya w_0 da

$$C_n = \frac{A}{5}$$

olur.

d. n=±1, n=±2, ..., n=±5 değerlerindeki "C_n" ler hesaplanır. Bunlara örnek olmak üzere n=1 deki "C_n" değerini bulalım.

n = 1 için

$$C_n = \frac{A}{5}\frac{\sin\left[\frac{8\pi(1/20)}{2}\right]}{\frac{8\pi(1/20)}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\frac{\pi}{5}} = \frac{A}{\pi}\sin\left(36^\circ\right)$$

veya

$$C_n = \frac{A}{5}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\frac{\pi}{5}}$$

dir. w_n (n=±2,±3,±4,±5) değerlerindeki genlikler de benzer şekilde bulunur (Çizelge 4.1). Çizelge 4.1 in görünümü Şekil 4.5 te verilmektedir. Bu problemde evre spektrumu sıfırdır. Çünkü dikdörtgen dalga düşey eksene göre bakışımlıdır. Bu nedenle "b_n" içeren terimler yoktur. Bu problemde evrenin olmadığı aşağıdaki gibi de kanıtlanabilir.

Karmaşık FS olan (4.7) bağıntısında

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(jnw_0t)$$

(4.14) bağıntısında

$$C_n = |C_n|\exp(j\phi_n)$$

yerine konulursa,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|\exp\left[j(nw_0t + \phi_n)\right] \qquad (4.20)$$

evreyi de içeren karmaşık FS denklemi elde edilir. Bulunan (4.20) genel denklemi, bu problemdeki FS açılımı olan (4.19) ile özdeşleştirilirse

$$|C_n| = \sin c\left(\frac{nw_0d}{2}\right) \quad , \quad \exp\left[j(nw_0t + \phi_n)\right] \equiv \exp\ (nw_0t) \quad , \quad \exp(j\phi_n) = 1$$

elde edilir. Euler denklemleri anımsandığında

$$\cos(\phi_n) + j\sin(\phi_n) = 1$$

olmalıdır. Bu koşulun sağlanması için ϕ_n=-2nπ, 0, 2nπ olmak zorundadır. Başka bir deyişle evre, 0° veya 360° nin tam katlarıdır.

Örnek 4.4
Şekil 4.6 da verilen "d" kadar kaydırılmış dikdörtgen dalganın spektrumunu bulunuz.

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\exp(-jnw_0 t)dt = \frac{A}{T}\int_0^d \exp(-jnw_0 t)dt = \frac{A}{T}\frac{1}{jnw_0}[1-\exp(-jnw_0 d)]$$
$$\exp(-jnw_0 d) = \exp[-jnw_0(d/2)].\exp[-jnw_0(d/2)]$$

şeklinde yazılıp exp[-jnw0(d/2)] parantezine alınırsa:

$$C_n = \frac{A}{T}\frac{1}{jnw_0}\exp[-jnw_0(d/2)]\{\exp[jnw_0(d/2)] - \exp[-jnw_0(d/2)]\}$$

dır. Bir önceki örnekte,

$$\exp[jnw_0(d/2)] - \exp[-jnw_0(d/2)] = 2j\sin(jnw_0 d/2)$$
elde edilmiştir.

$$C_n = \frac{A}{T}\frac{1}{jnw_0}2j\sin(nw_0 d/2).\exp[-jnw_0(d/2)].\frac{nw_0 d/2}{nw_0 d/2}$$
$$C_n = \frac{Ad}{T}\frac{\sin(nw_0 d/2)}{nw_0 d/2}\exp[-jnw_0(d/2)] \qquad (4.21)$$

olur. (4.21), (4.14) te yerine yazılarak ve bir önceki problemdeki yaklaşım kullanılarak genlik spektrumu ile evre spektrumuna ulaşılır.

$$|C_n| = \frac{Ad}{T}\frac{\sin(nw_0 d/2)}{nw_0 d/2} \qquad (4.22)$$
$$\exp(j\phi_n) = \exp[-jnw_0(d/2)] \text{ den } \left[\phi_n = \tan^{-1}(-b_n/a_n) \text{evre spektrumu}\right],$$
$$\phi_n = -\frac{nw_0 d}{2} = -n\pi\left(\frac{d}{T}\right) \quad \text{(d/T, radyan cinsinden)} \qquad (4.23)$$

İşlev bir önceki işlev ile aynı olmasına karşın "t" ekseninde "d/2" kadar kaydırıldığında elde edilen spektrumun hem genlik hem de evre spektrumu vardır. Yani spektrumda sanal bileşen bulunmaktadır.

d=1/20 ve T=1/4 sn için evre spektrumu Şekil 4.7 de verilmektedir.

Ödevler

1. $f(t) = A|\sin(\pi t)|\ 0 < t < 1\ f(t+T) = f(t)$ ve $T = 1$ ile verilen (Şekil 4.8) işlevi:

a. Karmaşık FS ne açınız.
b. Trigonometrik FS ne açınız.
c. a nın çözümünden yararlanarak trigonometrik FS nin katsayılarını hesaplayınız.

2. Çizelge 4.1 de verilen ara değerlere ait C_n genliklerini hesaplayınız.

3. $d = \frac{1}{20}$, $T = \frac{1}{2}$ sn için aynı problemi çözünüz.