BÖLÜM 3

DÖNEMLİ DALGA ŞEKİLLERİNİN ANALİZİ (ÇÖZÜMLENMESİ)

2. Bölümde verildiği gibi T dönemli bir f(t) işlevi eğer Dirichlet koşullarını gerçekliyorsa tüm terimleri FS ile gösterilebilir.

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(nw_0 t) + b_n \sin(nw_0 t)\right] \qquad (3.1)$$

burada w_0 temel frekanstır ve $w_0 = 2\pi / T$ dir.

3.1 İŞLEV TÜRLERİ

3.1.1 Tek işlevler (odd functions)

$f(-t) = -f(t)$ şeklindeki işlevlerdir. Bu işlevler düşey eksen boyunca ters bakışımlıdır. Tek işlevlerde $a_0 = 0$, $a_n = 0$ dır. Bu işlevlere örnek olarak sin(t) ve $f(t) = -t$ işlevleri gösterilebilir (Şekil 3.1).

3.1.2 Çift İşlevler (even functions)

$f(-t) = f(t)$ şeklindeki işlevlerdir. Düşey eksen boyunca bakışıktırlar. Çift işlevlerde, sinüs içeren katsayılar sıfırdır. Yani $b_n = 0$ dır. Bu işlevlere örnek olarak cos(t) ve $|t|$ işlevleri gösterilebilir (Şekil 3.2).

Herhangi bir işlev tek ve çift işlevlerinin toplamı şeklinde yazılabilir.

$$f(t) = f_ç(t) + f_t(t) \qquad (3.2)$$

(3.2) bağıntısında t→-t konursa:

$$f(-t) = \underbrace{f_ç(-t)}_{f_ç(t)} + \underbrace{f_t(-t)}_{f_ç(t)}$$

$$f(-t) = f_ç(t) - f_t(t) \qquad (3.3)$$

(3.2) ve (3.3) bağıntıları bir kez taraf tarafa toplanıp bir kez de taraf tarafa çıkarılarak

$$\left.\begin{aligned} f_ç(t) &= \frac{1}{2}\left[f(t) + f(-t)\right] \\ f_t(t) &= \frac{1}{2}\left[f(t) - f(-t)\right] \end{aligned}\right\} \qquad (3.4)$$

elde edilir [$f_ç(t)$, f(t) işlevinin çift; $f_t(t)$, f(t) işlevinin tek bileşenidir].

Örnek 1
Denklemi;

$$f(t) = \begin{cases} \exp(t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

ve Şekli 3.3a da verilen işlevi tek ve çift bileşenlerine ayırınız.

Verilen bağıntıda t=-t konursa,

$$f(-t) = \begin{cases} \exp(-t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$f_ç(t) = \frac{1}{2}\left[f(t) + f(-t)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix} \exp(-t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t > 0 \\ \exp(t) & t < 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$f_ç(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \exp(-t) & t > 0 \\ \exp(t) & t < 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\exp(-t) & t > 0 \\ \frac{1}{2}\exp(t) & t < 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur (Şekil 3.3b). Benzer şekilde,

$$f_t(t) = \frac{1}{2}\left[f(t) - f(-t)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix} \exp(-t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & t > 0 \\ \exp(t) & t < 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$f_ç(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \exp(-t) & t > 0 \\ -\exp(t) & t < 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\exp(-t) & t > 0 \\ -\frac{1}{2}\exp(t) & t < 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Tek ve çift bileşenlerine ayrılabilen işlevlerin Fourier dönüşümleri sinüs ve kosinüs dönüşümleri kullanılarak kolaylıkla bulunabilir. Buna ait diğer bir örnek Bölüm 5 Örnek 4 te verilmektedir.

3.1.3 Yarım bakışımlı dalgalar

$$f(t) = -f\left(t + \frac{1}{2}T\right) \tag{3.5}$$

bağıntısına uyan işlevlerdir (Şekil 3.4). Yarım dönem içinde işlevler yatay eksen boyunca tam birbirlerinin tersidir (yarım dönem içinde f(t) işlevi -1 ile çarpıldığında ikinci yarım dönemde alacağı değerdir).

3.2 BAKIŞIMLI İŞLEVLERİN FOURIER KATSAYILARI

f(t) işlevi T dönemi ile yinelenen bir çift işlev ise Fourier katsayıları yanlızca kosinüslü terimleri içerir. Sinüs içeren terimler sıfır olur.

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(nw_0 t) + b_n \sin(nw_0 t)\right] \qquad (3.6)$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(mw_0 t)dt \qquad n = 0,1,2,.... \qquad (3.7)$$

$$w_0 = \frac{2\pi}{T}$$

f(t) işlevi T dönemi ile yinelenen tek işlev ise Fourier katsayıları yanlızca sinüslü terimleri içerir, kosinüslü terimler sıfır olur.

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n \sin(nw_0 t)\right] \qquad (3.8)$$

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(nw_0 t)dt \qquad (3.9)$$

$$w_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Örnek 3.2

f(t)=at -T/2<t<T/2 işlevini (Şekil 3.5) çiziniz, FS ni bulunuz.

f(t=-t)=-at olduğundan işlev tektir, bu nedenle kosinüs içeren terimler yani a_0, a_n katsayıları sıfırdır. İşlev sinüs serisine açılabilir. (3.8) ve (3.9) bağıntılarından yararlanarak,

$$b_n = \frac{4a}{T}\int_0^{T/2} t \sin(nw_0 t)dt$$

değişken dönüşümü yapılarak

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

$$u = t \qquad dv = \sin(nw_0 t)dt$$

$$du = dt \qquad v = -[1/nw_0]\cos(nw_0 t)$$

$$= -\frac{t}{nw_0}\cos(nw_0 t)\Big|_{t=0}^{T/2} - \int_0^{T/2} -\frac{1}{nw_0}\cos(nw_0 t)dt$$

$$= -\frac{1}{nw_0}\cos(nw_0 t)\Big|_{t=0}^{T/2} + \left|\frac{1}{nw_0}\frac{1}{nw_0}\sin(nw_0 t)\right|_0^{T/2}$$

$$= \frac{1}{nw_0}\left|\frac{1}{nw_0}\sin(nw_0 t) - t\cos(nw_0 t)\right|_0^{T/2}$$

$$b_n = \frac{4a}{T}\frac{1}{nw_0}\left\{\left[\frac{1}{nw_0}\sin\left(n\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right) - \frac{T}{2}\cos\left(n\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right)\right] - \left[\frac{1}{nw_0}\sin(0) - 0.\cos(0)\right]\right\}$$

$$b_n = \frac{4a}{T}\frac{1}{nw_0}\left[\frac{1}{nw_0}\sin(n\pi) - \frac{T}{2}\cos(n\pi)\right]$$

$$b_n = \frac{4a}{T}\frac{1}{nw_0}\frac{T}{2}\cos(n\pi)$$

$$b_n = \frac{2a}{nw_0}\cos(n\pi) = -\frac{2a}{n\frac{2\pi}{T}}\cos(n\pi)$$

$$b_n = \frac{-aT}{n\pi}\cos(n\pi)$$

$$b_n = \begin{cases} -\frac{aT}{n\pi} & n = 2k \\ \frac{aT}{n\pi} & n = 2k+1 \end{cases}$$

dır. Seri

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nw_0 t)$$

n	1	2	3	4	5
b_n	$\frac{aT}{\pi}$	$-\frac{aT}{2\pi}$	$\frac{aT}{3\pi}$	$-\frac{aT}{4\pi}$	$\frac{aT}{5\pi}$

$$f(t) = \frac{aT}{\pi}\sin(w_0 t) - \frac{aT}{2\pi}\sin(2w_0 t) + \frac{aT}{3\pi}\sin(3w_0 t) - \frac{aT}{4\pi}\sin(4nw_0 t) + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f(t) = \frac{aT}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin(nw_0 t)$$

olarak bulunur.

3.3 (2L) DÖNEMLİ İŞLEVLERİN FOURIER SERİSİ

(-L,L) aralığında tanımlanmış (2L) dönemli bir işlev kosinüs ve sinüs terimleri içeren bir seriye açılabilir. (0,L) aralığında tanımlanmış (L) dönemli bir işlev ise yanlız kosinüs veya yalnız sinüs serisine açılır. t yerine

$$t = \frac{L\tau}{\pi} \rightarrow \tau = \frac{\pi t}{L} \quad , \quad d\tau = \frac{\pi}{L} dt \tag{3.10}$$

dönüşümleri yapılırsa

$$f(t) = f\left[\frac{L\tau}{\pi}\right] = \phi(\tau) \tag{3.11}$$

elde edilir. τ değişkeninin ϕ(τ) işlevi (-π,π) aralığında tanımlanmış 2π dönemli bir işlevdir. ϕ(τ) nun FS ve katsayıları:

$$\phi(\tau) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\tau) + b_n \sin(n\tau)\right] \tag{3.12}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\tau) d\tau \tag{3.13}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\tau) \cos(n\tau) d\tau \tag{3.14}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\tau) \sin(n\tau) d\tau \tag{3.15}$$

bağıntılarında;

$$\tau = \frac{\pi t}{L} \quad , \quad d\tau = \frac{\pi}{L} dt$$

dönüşümleri yapılıp (3.13), (3.14) ve (3.15) bağıntılarında yerine yazılır (bu bağıntılardaki tümlevin sınırları da -π→-L, π→L olacak şekilde değişir).

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-L}^{L} \underbrace{\phi\left(\frac{\pi t}{L}\right)}_{f(t)} \frac{\pi}{L} dt$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) dt \tag{3.16}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} \underbrace{\phi\left(\frac{\pi t}{L}\right)}_{f(t)} \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\frac{\pi}{L}dt$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt \tag{3.17}$$

ve benzer şekilde de,

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt \tag{3.18}$$

elde edilir. Böylece (-L,L) aralığında Dirichlet koşullarını sağlayan f(t) işlevi için FS:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi T}{L}\right) \tag{3.19}$$

veya kısaca:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L} + \phi_n\right) \tag{3.20}$$

olarak yazılır. $\pi/L=w_0$ konursa:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(nw_0 t + \phi_n) \tag{3.21}$$

elde edilir. (3.21) bağıntısında:

$$C_n = \left(a_n^2 + b_n^2\right)^{1/2} \qquad \phi_n = \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

dir. (3.21) eşitliğinde:

$C_n \cos(nw_0 t + \phi_n)$	: Fourier serisinin genel terimi.
w_0	: Temel frekans.
C_n	: Harmoniğin genliğidir ve hiç bir zaman (-) olamaz bu nedenle ¦Cn olarak gösterilir.
ϕ_n	: Evre (faz) açısıdır.

Örnek 3.3

(-1,1) aralığında tanımlı f(t)=t-t2 işlevinin dönemini bulun (Şekil 3.6), işlevin Fourier katsayılarını hesaplayınız.

Fonksiyon -1 ile 1 arasında tanımlı olduğuna göre dönem

$2L = 2 \rightarrow L = 1$

dir. (3.16), (3.17) ve (3.18) kullanılarak

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1}\left(t - t^2\right)dt = \int_{-1}^{1} t\,dt - \int_{-1}^{1} t^2\,dt = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right] = -\frac{2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1}\left(t - t^2\right)\cos(n\pi t)dt = -\frac{4\cos(n\pi)}{n^2\pi^2} \qquad (n \neq 0)$$

$$b_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1}\left(t - t^2\right)\sin(n\pi t)dt = -\frac{2\sin(n\pi)}{n\pi}$$

$$f(t) = -\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\left[\cos(\pi t) - \frac{\cos(2\pi t)}{4} + \frac{\cos(3\pi t)}{9} + ...\right] + \frac{2}{\pi}\left[\sin(\pi t) - \frac{\sin(2\pi t)}{2} + \frac{\sin(3\pi t)}{3} + ...\right]$$

Örnek 3.4

Dönemli bir dalganın denklemi ve şekli aşağıda verilmektedir (Şekil 3.7). İşlev tek bir işlev olduğuna göre diğer dönemlerdeki şeklini çiziniz FS ne açınız.

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2k}{L}t & 0 < t < \frac{L}{2} \\ \frac{2k}{L}(L - t) & L/2 < t < L \end{cases}$$

İşlev tek olduğundan düşey eksene göre ters bakışımlıdır ve sinüs serisine açılır (Şekil 3.8). Bu nedenle (3.18) bağıntısı kullanılır.

$a0 = 0$, $a_n = 0$ dır.

$$b_n = \frac{1}{L}\int_0^L f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt$$

$$= \frac{1}{L}\left[\int_0^{L/2}\frac{2k}{L}t\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt - \int_{L/2}^{L}(L - t)\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt\right]$$

$$= \frac{1}{L}\left[\frac{2k}{L}\int_0^{L/2} t\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt - \int_{L/2}^{L}(L - t)\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt\right]$$

dir. Bu bağıntılarda, birinci tümlevde

$$t = u \quad , \qquad \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt = dv$$

$$dt = du \quad , \qquad \frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) = v$$

değişken dönüşümleri yapılıp kısmi integrasyon alınır.

$$b_n = -\frac{L}{n\pi} t \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\Bigg|_{t=0}^{L/2} + \frac{1}{n\pi}\int_0^{L/2} \frac{2k}{L}\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt$$
$$= -\frac{L^2}{2n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

2. tümlev de benzer yol ile bulunur.

$$\int_{L/2}^{L} (L-t)\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt = \frac{L^2}{2n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$
$$b_n = \frac{1}{L}\left\{\frac{2k}{L}\left[-\frac{L}{2n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]\right\}$$
$$+\frac{1}{L}\left\{\frac{2k}{L}\left[-\frac{L^2}{2n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]\right\}$$
$$b_n = \frac{4k}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$
$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) = \frac{4k}{n^2\pi^2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{L}t\right) - \frac{1}{3^2}\sin\left(3\frac{\pi}{L}t\right) + \frac{1}{5^2}\sin\left(5\frac{\pi}{L}t\right) - ....\right]$$

3.4 FOURİER SERİSİNİN TÜREVİ

(3.1) denklemi ile verilen FS nin türevi aşağıdaki gibi bulunur. f'(t), parçalı sürekli ve türetilebilir bir işlev olduğundan f'(t) nin FS:

$$f'(t) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n \cos(nw_0 t) + \beta_n \sin(nw_0 t)\right] \qquad (3.22)$$

şeklinde olacaktır. α_0, α_n ve β_n katsayıları hesaplanıp (3.22) de yerine konursa f'(t) işlevi a_0, a_n ve b_n cinsinden bulunur.

$$\alpha_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(t)dt = \frac{2}{T} f(t)\Big|_{-T/2}^{T/2}$$
$$= \frac{2}{T}\left[f(T/2) - f(-T/2)\right] = 0 \quad , \quad \alpha_0 = 0$$

$$\alpha_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(t)\cos(nw_0 t)dt$$

dir. Bu bağıntıda

$$\cos(nw_0 t) = u \qquad , \quad dv = f'(t)$$
$$-nw_0 \sin(nw_0 t)dt = du \ , \quad v = f(t)$$

dönüşümleri yapılarak kısmi integrasyon alınırsa;

$$\alpha_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(t)\cos(nw_0 t)\,dt = \left[\frac{2}{T} f(t)\cos(nw_0 t)dt\Big|_{-T/2}^{T/2} + nw_0 \int_{-T/2}^{T/2} f'(t)\sin(nw_0 t)\,dt\right]$$

$$\alpha_n = \left[f(T/2)\underbrace{\cos(n\pi)}_{1} - f(-T/2)\underbrace{\cos(-n\pi)}_{1} + nw_0 \int_{-T/2}^{T/2} f'(t)\sin(nw_0 t)\,dt\right]$$

Elde edilir. Ayrıca

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(t)\sin(nw_0 t)\,dt$$

olduğu bilinmektedir. Buradan da,

$$\frac{T}{2} b_n = \int_{-T/2}^{T/2} f'(t)\sin(nw_0 t)\,dt$$

bulunur.

$$\alpha_n = \left\{ \left[f(T/2) - f(-T/2)\right] + nw_0 \frac{T}{2} b_n \right\} = \frac{2}{T} nw_0 \frac{T}{2} b_n = nw_0 b_n$$

olarak elde edilir.

$$\beta_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(t)\sin(nw_0 t)\,dt$$

tümlevi de aynı yol ile alınırsa $\beta_n = -nw_0 a_n$ bulunur.

Bunlara göre (3.22) bağıntısı, yani FS nin türevi f'(t),

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[nw_0 a_n \sin(nw_0 t) + nw_0 b_n \cos(nw_0 t)\right] \qquad (3.23)$$

şeklinde elde edilir. (3.23) bağıntısından anlaşılacağı gibi FS nin türevi; serinin Fourier katsayılarının $\pm nw_0$ ile çarpılmasından bulunur. n in artan değerine karşılık a_n ve b_n yeterince küçük olmaz ise başlangıçtaki seri yakınsak olmasına karşın elde edilen seri ıraksak olur.

Ödevler

1. Örnek 3.2 yi çift işlev olarak çözünüz.

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 2\int_{0}^{\infty} f(t)dt$

olduğunu gösteriniz.

3. (-π,π) aralığında $f(t)=|t|$ ve f(t+2π)=f(t) olarak tanımlanan işlevin FS ni bulunuz.

4. f(t), (-T/2,T/2) aralığında T ile dönemli bir işlevdir. Eğer f(t) işlevinin tek ve çift bileşenleri $f_t(t)$, $f_ç(t)$ ise

$$f_ç(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos(nw_0t)[+]$$

$$f_t(t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nw_0t)$$

olduğunu gösteriniz.

5. Herhangi bir f(t) işlevi tek ise $|f(t)|$ nin çift olduğunu gösteriniz.

6. Aşağıdaki işlevleri tek ve çift bileşenlerine ayırınız.

a. $\exp(t)$ b. $\frac{t+1}{t-1}$ c. $t\sin(t)-\sin(2t)$
