BÖLÜM 2

FOURİER SERİLERİ (FS)

1. Bölümde tek bir sinüzoidalin veya sinüzoidallerin toplamından oluşan bir sinyalin spektrumunun nasıl bulunacağı verilmişti. Tüm bulunan sonuçlar Fourier serilerinden (FS) yararlanarak dönemsel sinyaller için genelleştirilebilir. Spektrum analizinde FS nin kullanılabilmesinin en önemli koşulu, sinyalin dönemsel olmasıdır.

2.1 DÖNEMLİ İŞLEVLER (PERİODİC FUNCTİONS)

Tüm "t" değerleri için

$$f(t) = f(t + T) \qquad (2.1)$$

eşitliğini sağlayan f(t) işlevi dönemli olup "T" ye dönem (period) denilir (Şekil 2.1). Başka bir deyişle T aralıkları ile aynı değeri alan işlevlere dönemli işlevler denir. Dönemli işlevlerde

$$f(t) = F(t + nT) \qquad n = 0,1,2, \qquad (2.2)$$

koşulu sağlanır.

En genel durumda eğer işlev "T" ile dönemli ise,

$$f(t) = \cos(w_1 t) + \cos(w_2 t)$$

$$w_1 t = 2\pi m \qquad (2.3)$$

$$w2t = 2\pi n \qquad (2.4)$$

eşitliklerini sağlayan m ve n değerleri bulunabilir. Yukarıdaki

eşitliklerden

$$\frac{w_1 t}{w_2 t} = \frac{2\pi m}{2\pi n} \quad , \quad \frac{w_1}{w_2} = \frac{m}{n} \qquad (2.5)$$

w_1/w_2 oranı rasyonel bir sayı olmalıdır, aksi halde dönemli olmaz.

Örnek 2.1
$f(t) = \cos(t/3) + \cos(t/4)$ işlevi dönemli midir? Dönemli ise dönemini bulunuz.

İşlev dönemli olabilmesi için (2.1) eşitliğini sağlamalıdır. Yani f(t)=f(t+T) olmalıdır.

$$f(t) = \cos\left(\frac{t}{3}\right) + \cos\left(\frac{t}{4}\right)$$
$$f(t) = \cos\left[\frac{1}{3}(t)\right] + \cos\left[\frac{1}{4}(t)\right]$$
$$f(t+T) = \cos\left[\frac{1}{3}(t+T)\right] + \cos\left[\frac{1}{4}(t+T)\right]$$
$$= \cos\left(\frac{t}{3}\right) + \cos\left(\frac{t}{4}\right)$$

trigonometrik denklemlerden cos(θ+2πm)=cos(θ) olduğu anımsanarak (Şekil 2.2),

$$\cos\left[\frac{t}{3} + \frac{T}{3}\right] + \cos\left[\frac{t}{4} + \frac{T}{4}\right]$$
$$0+2\pi m \qquad 0+2\pi n$$

yazılabilir.

$$\frac{T}{3} = 2\pi m \qquad \frac{T}{4} = 2\pi n$$
$$T = 6m\pi \qquad T = 8n\pi$$
$$6m\pi = 8n\pi$$
$$6m = 8n\left[\frac{m}{n} = \frac{6}{8} \rightarrow \text{dönemlidir}\right]$$

6 ile 8 in EKOK 24 tür. Öyleyse,

m = 4 n = 3 tür (24 = 24)

T = 6mπ → T = 6.4π = 24π den dönemi 24π dir.

Aynı problem (1.3) ve (1.4) bağıntılarından yararlanılarak ta çözülebilir.

$$f(t) = \cos\left[\frac{1}{3}(t)\right] + \cos\left[\frac{1}{4}(t)\right]$$

bağıntısının genel şekli ise,

$$f(t) = \cos(w_1 t) + \cos(w_2 t)$$

idi. Yani,

$$w_1 = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad 2m\pi = \frac{1}{3}$$

$$w_2 = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad 2n\pi = \frac{1}{4}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{4}{3}$$

dir. Buradan da dönem elde edilir.

Örnek 2.2

$f(t) = \cos(10t) + \cos(10+\pi)t$ işlevi dönemli midir? Dönemli ise dönemi nedir.

$f(t) = \cos(w_1 t) + \cos(w_2 t)$ genel yaklaşımı hatırlanarak,

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{10t}{(10+\pi)t} \qquad \frac{w_1}{w_2} = \frac{10}{10+\pi} = \frac{2\pi m}{2\pi n}$$

elde edilir. m ve n rasyonel sayı olarak bulunamayacağından dönemli değildir.

2.1.1 Dönemli işlevlerin özellikleri

$f(t) = f(t+T)$ ise,

a) $$\int_{a-T/2}^{a+T/2} f(t)\,dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt$$

dir. a=T/2 konursa

$$\int_0^T f(t)\,dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt$$

olarak bulunur.

b. $$\int_T^{t+T} f(t)\,dt \qquad (2.8)$$

dır.

c. $$g(t) = \int_0^t f(u)\,du$$

ise ancak

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$$

olduğunda

$$g(t+T) = g(t) \tag{2.9}$$

dır.

d. $$\int_{c}^{c+T} f(t)\,dt = \int_{0}^{T} f(t)dt \tag{2.10}$$

dır.

2.2 FOURİER SERİLERİ

Eğer f(t) işlevi "T" ile dönemli ise, bu işlev aşağıdaki gibi bir trigonometrik seri ile gösterilebilir.

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos(w_0 t) + a_2\cos(2w_0 t).........+ b_1\sin(w_0 t) + b_2\sin(2w_0 t) + ...$$

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nw_0 t) + b_n\sin(nw_0 t)\right] \tag{2.11}$$

Burada $w_0=2\pi/T$ dir. (2.11) ile verilen seriye trigonometrik Fourier serisi ve bu açılıma da harmonik analiz denir. (2.11) bağıntısı

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\cos(nw_0 t - \theta_n) \tag{2.12}$$

şeklinde de yazılabilir. Bu bağıntıda $C_n\cos(nw_0 t - \theta_n)$ genel terimine f(t) işlevinin n. ci harmonik işlevi denir.

Örnek 2.3
(2.11) ve (2.12) bağıntılarından hareketle C_n ve θ_n i, a_n ve b_n cinsinden elde ediniz.

$$a_n\cos(nw_0 t) + b_n\sin(nw_0 t) = \frac{\left(a_n^2 + b_n^2\right)^{1/2}}{\left(a_n^2 + b_n^2\right)^{1/2}}\left[a_n\cos(nw_0 t) + b_n\sin(nw_0 t)\right]$$

$$\left(a_n^2 + b_n^2\right)^{1/2}\left[\frac{a_n}{\left(a_n^2 + b_n^2\right)^{1/2}}\cos(nw_0 t) + \frac{b_n}{\left(a_n^2 + b_n^2\right)^{1/2}}\sin(nw_0 t)\right]$$

diğer yandan,

$$f(t) = C_n \cos(nw_0 t - \theta_n) = C_n [\cos(nw_0 t)\cos(\theta_n) + \sin(nw_0 t)\sin(\theta_n)] \text{dir. Öyleyse :}$$

$$C_n [\cos(nw_0 t)\cos(\theta_n) + \sin(nw_0 t)\sin(\theta_n)] = \left(a_n^2 + b_n^2\right)^{1/2}$$

$$.\left[\frac{a_n}{\left(a_n^2 + b_n^2\right)^{1/2}} \cos(nw_0 t) + \frac{b_n}{\left(a_n^2 + b_n^2\right)^{1/2}} \sin(nw_0 t)\right]$$

.

yazılabilir. Buradan katsayılar,

$$C_n = \left(a_n^2 + b_n^2\right)^{1/2} \tag{2.14}$$

$$\cos(nw_0 t)\cos(\theta_n) + \sin(nw_0 t)\sin(\theta_n) = \frac{a_n}{\left(a_n^2 + b_n^2\right)^{1/2}} \cos(nw_0 t)$$

$$\cos(\theta_n) = \frac{a_n}{\left(a_n^2 + b_n^2\right)^{1/2}}$$

$$\sin(nw_0 t)\sin(\theta_n) = \frac{b_n}{\left(a_n^2 + b_n^2\right)^{1/2}} \sin(nw_0 t)$$

$$\sin(\theta_n) = \frac{b_n}{\left(a_n^2 + b_n^2\right)^{1/2}}$$

bu bağıntılardan da

$$\tan(\theta_n) = \frac{\sin(\theta_n)}{\cos(\theta_n)} = \frac{b_n}{a_n} \quad \text{veya} \quad \theta_n = \tan^{-1} = \left(\frac{b_n}{a_n}\right) \tag{2.15}$$

elde edilir. Yukarıdaki yaklaşımlar göz önüne alındığında da

$$C_0 = \frac{1}{2} a_0 \tag{2.16}$$

olduğu görülür. Bu bağıntılarda:

C_n : Harmonik genliği.
θ_n : Evre (faz)) açısıdır.

Bilindiği gibi wn=nw0 dönemli işlevin n. harmoniğidir. n=0 için $w_0=2\pi/T=2\pi f_0$ ise temel bileşen veya temel açısal frekanstır.

2.3 ORTOGONAL İŞLEVLER

FS açılımlarının yapılabilmesi için sinüs ve kosinüs işlevlerinin bazı özelliklerinin bilinmesi gerekir. Bunlardan en önemlisi ortogonallik koşulu, ve bu koşul sonucu oluşan ortogonal işlevlerdir.

$[\phi_k(t)]$ dizisinin herhangi iki işlevi a<t<b sınırları içinde

$$\int_a^b \phi_m(t)\phi_n(t)dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \quad \text{için} \\ r_n & m = n \quad \text{için} \end{cases} \tag{2.17}$$

eşitliğini sağlıyorsa ϕ_m ve ϕ_n işlevleri (a,b) aralığında birbirlerine ortogonaldir denir.

Sinüzoidal işlevlerde aşağıdaki ortogonallik koşulları vardır.

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(mw_0t)dt = 0 \qquad m \neq 0 \quad \text{için} \tag{2.18a}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(mw_0t)dt = 0 \qquad \text{tüm m değerleri için} \tag{2.18b}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(mw_0t)\cos(nw_0t)dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T/2 & m = n \neq 0 \end{cases} \tag{2.18c}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(mw_0t)\sin(nw_0t)dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T/2 & m = n \neq 0 \end{cases} \tag{2.18d}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(mw_0t)\cos(nw_0t)dt = 0 \qquad \text{tüm m ve n değerleri için} \tag{2.18e}$$

Burada $w_0=2\pi T$ dir. Yukarıdaki bağıntılar; 1, $\cos w_0t$, $\cos 2w_0t$,....,$\cos nw_0t$, $\sin w_0t$, $\sin 2w_0t$,...., $\sin nw_0t$ dizisinin $-T/2<t<T/2$ aralığında ortogonal olduğunu gösterir. Ancak bu dizi $0<t<T/2$ aralığında ortogonal değildir. Yani aralığın değişmesi durumunda dizi, ortogonallik özelliğini yitirir. Bu nedenle ortogonallikten söz ederken mutlaka aralık ta verilmelidir.
(2.17) bağıntısında m=n için elde edilen tümlevin

$$\int_a^b \phi_m^2(t)dt = A_m = \|\phi\| \tag{2.19}$$

değerine $\phi_m(t)$ nin normu denir. Eğer,

$$\phi_m(t) = [A_m]^{-1/2}\phi_m(t)$$

alınırsa, (2.19) un normu 1 olur.

$$\int_a^b [(A_m).\phi_m(t)dt]^2 = 1 \tag{2.20}$$

Bu durumda,

$$\frac{\phi_1(t)}{(A_1)^{1/2}}, \frac{\phi_2(t)}{(A_2)^{1/2}}, \frac{\phi_3(t)}{(A_3)^{1/2}}, \ldots\ldots\ldots, \text{ normalleştirilmiş işlev} = \frac{\phi_m(t)}{(A_m)^{1/2}}$$

dizisi alınıyor demektir. Normu 1'e eşit olan bu diziye ORTONORMAL CÜMLE, $\phi_m(t)$ işlevlerine de NORMALLEŞTİRİLMİŞ İŞLEV denir. Yani,

$$\int_a^b \phi_m(t)\phi_n(t)dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} \tag{2.21}$$

eşitliğini sağlayan $\phi_k(t)$ cümlesi ortonormal cümledir. Örneğin,

$$\int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi \quad , \quad \int_0^{2\pi} \sin^2(nt)dt = \pi \quad , \quad \int_0^{2\pi} \cos^2(nt)dt = \pi \qquad (n \geq 1)$$

olduğuna göre

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}, \frac{\sin(t)}{(\pi)^{1/2}}, \frac{\cos(t)}{(\pi)^{1/2}}, \frac{\sin(nt)}{(\pi)^{1/2}}, \frac{\cos(nt)}{(\pi)^{1/2}}, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

ortonormal cümlelerdir. Yani ortonormal cümlelerde iki değişik işlevin çarpımının 0 dan 2π ye dek tümlevi sıfır, her birinin karesinin sıfırdan 2π ye dek tümlevi ise 1 dir.

Örnek 2.4
(2.18c) eşitliğinin varlığını gösteriniz.

Trigonometriden,

$$\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}\left[\cos(A+B) + \cos(A-B)\right]$$

$$w_0 t\Big|_{-T/2}^{T/2} \begin{cases} t = \dfrac{-T}{2} & \text{için} \quad \dfrac{2\pi}{T}.\dfrac{-T}{2} = -\pi \\ t = \dfrac{T}{2} & \text{için} \quad \dfrac{2\pi}{T}.\dfrac{T}{2} = \pi \end{cases} \qquad \text{dir.}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(mw_0t)\cos(nw_0t)dt = \frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2} \{\cos[(m+n)w_0t] + \cos[(m-n)w_0t]\}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(m+n)w_0}\sin[(m+n)w_0t]\Big|_{t=-T/2}^{T/2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(m-n)w_0}\sin[(m-n)w_0t]\Big|_{t=-T/2}^{T/2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(m+n)w_0}\{\sin[(m+n)\pi] - \sin[(m+n)(-\pi)]\} + \frac{1}{2}\frac{1}{(m-n)w_0}\{\sin[(m-n)\pi] - \sin[(m-n)(-\pi)]\}$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{(m+n)w_0}2\sin[(m+n)\pi] + \frac{1}{2}\frac{1}{(m-n)w_0}2\sin[(m-n)\pi] = 0$$

dir. Eğer m≠n ise sonuç sıfırdır. Eğer m=n≠0 ise

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(mw_0 t)\cos(nw_0 t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(mw_0 t)dt$$

olur ve

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}[1 + \cos(2\alpha)]$$

dır. Buradan

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(mw_0 t)dt = \frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/'} [1 + \cos(2mw_0 t)]dt = \frac{1}{2} t\Big|_{t=-T/2}^{T/2} + \frac{1}{4mw_0}\sin(2mw_0 t)\Big|_{t=-T/2}^{T/2}$$

$$= \frac{T}{2} + \frac{1}{4mw_0}[\sin(2m\pi) - \sin(-2m\pi)] = \frac{T}{2} + \frac{1}{4mw_0} 2\sin(2m\pi) = \frac{T}{2}$$

bulunur.

Örnek 2.5
$\Phi = t^2/p$ olarak verilen bir parabolü 0-5 birim arasında normalleştiriniz (Şekil 2.3).

(2.19) dan yararlanarak,

$$A_m = \int_0^5 \left(\frac{t^2}{p}\right)^2 dt = \frac{1}{p^2}\left|\frac{t^5}{5}\right|_0^5 = \frac{625}{p^2}$$

elde edilir. Buradan da normalize edilmiş işlev,

$$\text{Nor. işşle} = \frac{\phi(t)}{(A_m)^{1/2}} = \frac{\frac{t^2}{5}}{\left(\frac{625}{p^2}\right)^{1/2}} = \frac{t^2}{25}$$

olarak bulunur.

2.4 FOURİER SERİSİ KATSAYILARININ HESAPLANMASI

(2.18) deki ortogonallik bağıntıları kullanılarak, (2.11) deki FS nin katsayıları hesaplanabilir. (2.11) bağıntısı

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nw_0 t) + b_n \sin(nw_0 t)]$$

şeklinde tanımlanmıştı. a_0 katsayısını hesaplamak için (2.11) bağıntısının her iki tarafının -T/2, T/2 aralığında tümlevi alınırsa

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt = \frac{1}{2}a_0\int_{-T/2}^{T/2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2}\cos(nw_0t)dt}_{0} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2}\sin(nw_0t)dt}_{0}$$

şeklini alır. Bu bağıntıda toplam ile tümlevin yerlerini değiştirip ortogonallik koşulları kullanılırsa [(2.18a) ve (2.18b) denklemlerinden]

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt = \frac{1}{2}a_0\int_{-T/2}^{T/2} dt = \frac{a_0}{2}T$$

den

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt \tag{2.22}$$

olarak bulunur.

a_n katsayısını elde edebilmek için ise (2.11) bağıntısının her iki tarafı $\cos(mw_0t)$ ile çarpılıp (-T/2,T/2) aralığında tümlevi alınırsa,

$$\begin{aligned}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt\cos(mw_0t)dt &= \frac{1}{2}a_0\int_{-T/2}^{T/2}\cos(mw_0t)dt + \int_{-T/2}^{T/2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nw_0t)\right]\cos(mw_0t)dt \\ &+ \int_{-T/2}^{T/2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(nw_0t)\right]\cos(mw_0t)dt\end{aligned} \tag{2.23}$$

elde edilir. Toplam ve tümlev işlevlerinin öncelik sırası değiştirilir ve (2.18a), (2.18c) ve (2.18e) denklemleri kullanılırsa; (2.23) bağıntısı

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt\cos(mw_0t)dt = \frac{1}{2}a_0\underbrace{\int_{-T/2}^{T/2}\cos(mw_0t)dt}_{0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2}\cos(nw_0t)\cos(mw_0t)dt}_{0}$$

$$+\, b_n\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\int_{-T/2}^{T/2}\sin(nw_0t)\cos(mw_0t)dt}_{0}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(mw_0t)dt = \frac{T}{2}a_n$$

elde edilir. Bağıntının sol tarafındaki m yerine n konursa, sonuçta, an katsayısı,

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(mw_0 t)dt \qquad n = 0,1,2,.... \qquad (2.25)$$

olarak bulunur.

Benzer yolla (2.11) bağıntısının her iki yanı $\sin(nw_0t)$ ile çarpılıp (-T/2,T/2) arasında tümlevi alındığında, b_n katsayısı elde edilir. Tüm katsayılar, toplu olarak aşağıdaki bağıntılar yardımıyla verilir.

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt \qquad (2.26)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(mw_0 t)dt \qquad n = 0,1,2,.... \qquad (2.27)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(mw_0 t)dt \qquad n = 0,1,2,.... \qquad (2.28)$$

Not: (2.26) bağıntısı, işlevin (-T/2,T/2) sınırları arasında aritmetik ortalamasıdır.

Örnek 2.6

Aşağıda verilen f(t) işlevinin f(t)=f(t+T) olduğunu varsayarak şeklini çiziniz, spektrum ortamındaki frekans bileşenlerini bulunuz ve FS bağıntısını elde ediniz.

$$f(t) = \begin{cases} -1 & -T/2 < t < 0 \\ 1 & 0 < t < T/2 \end{cases}$$

(2.26) bağıntısından (Şekil 2.4),

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt = 0$$

Not:

$$w_0 t = \begin{cases} \pi & t = T/2 \\ -\pi & t = -T/2 \end{cases}$$

---

dır. Burada dikkat edilmesi gereken nokta (2.26) bağıntısı ortalama değeri verdiğinden ve bu değer de sıfır olduğundan tümlevi hesaplamak gereksizdir. (2.27) bağıntısından yararlanarak ta an katsayısı,

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(mw_0 t)dt = \\
&= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0}(-1)\cos(mw_0 t)dt + \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2}(1)\cos(mw_0 t)dt \\
&= \frac{2}{T}\left[\frac{-1}{nw_0}\sin(nw_0 t)\Big|_{-T/2}^{0} + \frac{1}{nw_0}\sin(nw_0 t)\Big|_{0}^{T/2}\right] \\
&= \frac{2}{T}\left\{\frac{-1}{nw_0}[\sin(0)-\sin(-n\pi)] + \frac{1}{nw_0}[\sin(n\pi)-\sin(0)]\right\} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Not: [sin(0)=sin(nπ)=0]

---

olarak bulunur. (2.28) denkleminden yararlanarak ta b_n katsayısı

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(nw_0 t)dt = \\
&= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0}(-1)\sin(nw_0 t)dt + \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2}(1)\sin(nw_0 t)dt \\
&= \frac{2}{T}\left[\frac{1}{nw_0}\cos(nw_0 t)\Big|_{-T/2}^{0} + \frac{-1}{nw_0}\cos(nw_0 t)\Big|_{0}^{T/2}\right] \\
&= \frac{2}{T}\left\{\frac{-1}{nw_0}[\cos(0)-\cos(-n\pi)] - \frac{1}{nw_0}[\cos(n\pi)-\cos(0)]\right\} \\
&= \frac{2}{nw_0 T}[1-\cos(n\pi)-\cos(n\pi)+1] \\
&= \frac{2}{nw_0 T}[2-2\cos(n\pi)] = \frac{4}{nw_0 T}[1-\cos(n\pi)] \\
&= \frac{2}{n\pi}[1-\cos(n\pi)]
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Bu bağıntıda,

n çift ise $\cos(n\pi) = 1$ ve $b_n = 0$
n tek ise $\cos(n\pi) = -1$ ve $b_n = 4/n\pi$

olur. Yani diğer bir deyişle

$$
b_n = \begin{cases} 0 & n \to \text{çift} \\ 4/n\pi & n \to \text{tek} \end{cases}
$$

dir. Bulunan a_0, a_n ve b_n katsayıları (2.11) de yerine konarak FS açılımı elde edilir. Ancak burada a_0 ve a_n katsayıları sıfır olduğu için FS açılımı sadece b_n katsayısı kullanılarak yapılacaktır. Sonuçta,

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=tek}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nw_0 t)$$
$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left[\sin(w_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3w_0 t) + \frac{1}{5} \sin(5w_0 t) + \ldots\ldots\ldots\ldots \right]$$

elde edilir. İşlevin spektrum ortamındaki görünümü ise Şekil 2.5 te verilmektedir.

FS açılımına iki yönden bakılabilir. Bunlardan ilki Şekil 2.4te verilen sonsuz uzunluklu, dönemsel işlevin trigonometrik seriler kullanılarak yaklaştırılmış bağıntısının elde edilmişidir. Diğeri ise "w" ortamında çeşitli harmoniklere ait binlerdeki ($1w_0$,$3w_0$, $5w_0$, ...) genliklerdir. "F(w)" nın düşey, "w" nın da yatay eksen alınmak üzere elde edilen spektrumu, bize spektrum ortamındaki genliklerin durumunu gösterir.

Bu problemde a_0 ve a_n katsayıları sıfırdır. Evre ise (2.15) bağıntısından bulunur. $a_n=0$ olmasından $\theta_n = \tan^{-1}(\infty)$ olarak elde edilir. Tan-1 işlevi ancak $\pm\pi/2$ de sonsuz olur. Öyleyse a_n katsayısının olmaması durumunda (işlevin yalnızca tek işlev olması, çift bileşeninin bulunmaması) evre $\theta_n=\pi/2$ veya $\theta_n=\pi/2$ ($=3\pi/2$) değerine sahip olacaktır. Eğer işlev buradaki gibi tek değil de çift işlev olsaydı bu kez de $\theta_n = \tan^{-1}(0)$ ve $\theta_n = 0$ olacaktı yani evre sıfır veya "π" radyan olacaktı.

2.5 SONLU FOURİER SERİLERİNE YAKLAŞIM

Herhangi bir f(t) işlevi, diğer bir $S_k(t)$ işlevine yaklaştırılabilir.

$$S_k(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nw_0 t) + b_n \sin(nw_0 t) \right] \tag{2.29}$$

olarak gösterilirse,

$$E_k(t) = \left| f(t) - S_k(t) \right| \quad \text{veya} \quad E_k^2(t) = \left[f(t) - S_k(t) \right]^2 \tag{2.30}$$

farkı bu yaklaşımın yanılgısıdır. $k \rightarrow \infty$ için yukarıdaki farklar sıfıra giderse $S_k(t)$ dizisi de f(t) dizisine yaklaşır. Burada:

$E_k(t)$: f(t) ve onun yaklaşımı $S_k(t)$ arasındaki yanılgıdır.
$E_k^2(t)$: Ortalama karesel yanılgıdır (yanılgı enerjisi, mean square error).

$-T/2<t<T/2$ aralığında yanılgılar ise aşağıdaki bağıntı ile verilir.

$$E_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[E_k(t) \right]^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[f(t) - S_k(t) \right]^2 \tag{2.31}$$

2.5.1 Yanılgı enerjisinin özellikleri

f(t) işlevinin sonlu $S_k(t)$ işlevine yaklaştırmada tanımlanan ortalama karesel yanılgının (E_k) özellikleri aşağıda verilmektedir.

$$E_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \frac{a_0}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \tag{2.32}$$

$$\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt \geq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \tag{2.33}$$

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \frac{a_0}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \tag{2.34}$$

(2.34) denklemi Parseval kuramı olarak bilinir. Bu konuya Bölüm 5.6.2e de ayrıntılı olarak değinilecektir.

2.6 DİRİCHLET KOŞULLARI

(-T/2,T/2) aralığında, T ile dönemli bir f(t) işlevi, aşağıdaki koşullarla tanımlanır.

1. f(t) işlevi bir dönem içinde sonlu sayıda süreksizlikler içermelidir veya başka bir deyişle f(t) işlevi (-T/2,T/2) aralığında sürekli veya parçalı sürekli olmalıdır (Şekil 2.6). Bir f(t) işlevine sağdan ve soldan yaklaşıldığında farklı limit değerleri elde ediliyorsa bu f(t) işlevine bu aralıkta parçalı sürekli işlev denir.

2. f(t) işlevi bir dönem içinde sonlu sayıda max ve min içermeli dir. 1 ve 2 özelliklerini gösteren işlevlere PARÇALI SÜREKLİ İŞLEVLER denir.

3. f(t) işlevinin bir dönem içinde mutlak tümlevi alınabilir olmalıdır.

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)dt| = \text{sonlu}(< \infty) \tag{2.35}$$

Ödevler

1. (2.18d) ve (2.18e) eşitliklerini kanıtlayınız.

2. FS katsayılarından bn katsayısını an katsayısına benzer şekilde verilen yolla bulunuz.

3. Aşağıda tanımı verilen dönemli işlevin Fourier katsayılarını bulunuz ve seriye açınız.

$$f(t) = \begin{cases} 1 + \dfrac{4t}{T} & , \quad \dfrac{-T}{2} < t \leq 0 \\ 1 - \dfrac{a}{T} & , \quad 0 \leq t < \dfrac{T}{2} \end{cases}$$

4. Aşağıda tanımlanan işlevin şeklini çizin, FS katsayılarını bularak seriye açınız.

$$f(t)=\begin{cases} 0 & , \quad -\frac{T}{2} < t \le 0 \\ A\sin(w_0 t) & , \quad 0 \le t < \frac{T}{2} \end{cases}$$