BÖLÜM 1

SİNYAL (İZ) VE SPEKTRUM

1.1 GİRİŞ

İletişim sistemlerinde kullanılan spektral analiz yöntemleri, son zamanlarda jeofizik sinyallerde de genişçe kullanılmaktadır. Jeofizikte sinyaller genellikle zaman (t) ve uzay (x) ortamlarında tanımlanırlar (gravite, manyetik, sismik ölçmeler, vd.). Ancak izlerin çözümlenmesi (analiz) sırasında, bunların frekans ortamında tanımlanması yararlıdır.

Zaman veya uzay ortamında görülemeyen olaylar frekans ortamın-da daha kolay görülebilir. Örneğin potansiyel alanlarda alınan ölçülerde, derin veya sığ etkilerin araştırılmasında izin frekans ortamı görünümü kullanılarak, kolaylıkla derin ve sığ etkiler bir birinden ayrılabilir. Frekans ortamı kullanmanın diğer bir yararı da bu ortamda bazı süzgeçlerin düzenlenmesindeki kolaylıklardır. Eğer örnekleri genişletecek olursak güç spektrumu, Hilbert dönüşümleri ve diğer dönüşümler gibi spektral analiz yöntemleri jeofiziğin birçok dalında (elektromanyetik, sismik, deprem verileri vd.) kullanılmaktadır.

Bu kitapta, zaman ortamı tanımı küçük harflerle x(t), y(t) ve f(t) frekans ortamı tanımı da büyük harflerle X(f), Y(f) ve F(f) şeklinde verilecektir. "f" harfi bağımsız değişken olup frekansı göstermektedir. Çizgisel ve açısal frekanslar birbirlerine 2π ölçeklemesi ile bağlıdır. Dolayısı ile frekans ortamı bağımsız değişkeni "w" olarak ta kullanılır. O zaman frekans ortamı tanımları X(w), Y(w) ve F(w) ile gösterilecektir. Özetle bir x(t) izinin, her biri uygun genlik ve evrede olan belli sayıda frekans bileşeninden oluştuğu varsayılabilir. Bu nedenle zaman (veya uzay) ortamında algılanacak bir sinyal, spektrum ortamı bileşenlerinden oluşacaktır. Spektral analizde amaç bu frekans bileşenlerinin bulunmasıdır.

1.2 FREKANS BİLEŞENLERİNİN BULUNMASI

Spektral analiz yöntemleri uygulanacak sinyal; eğer basit sinüzoidallerin toplamından oluşuyorsa, yani analitik denklemleri belli ise analiz, fazörler (karmaşık düzlemde dönen vektörler) ile yapılabilir. Bu konuyu açıklamak amacı ile tek bir sinüzoidalin denklemi,

$$f(t) = A\cos(w_1 t + \phi) \qquad (1.1)$$

dir. Euler kuramından,

$$\exp(j\alpha) = \cos(\alpha) + j\sin(\alpha)$$

den yararlanarak

$$\cos(\alpha) = \mathrm{Ger}[\exp(j\alpha)]$$

yazılır. Benzer şekilde

$$f(t) = \mathrm{Ger}\{A\exp[j(w_1 t + \phi)]\} \qquad \text{(GER=Gerçel)} \qquad (1.2)$$

olarak tanımlanır.

(1.2) bağıntısındaki parantez içindeki $A\exp[j(w_1 t+\phi)]$ terimine "karmaşık düzlemde dönen vektör" denir. Bu, bir vektörün karmaşık düzlemde gösterilimidir (Şekil 1.1). Elektrikçiler buna "Fazör" adını verirler.

Bu dönen vektörün üç önemli özelliği vardır:

1. A dönen vektörün genliğidir ve sürekli olarak sıfırdan büyüktür $(A \geq 0)$.

2. ϕ dönen vektörün evresidir. Vektörün $t=0$ anında gerçel eksenle yaptığı açı olarak tanımlanır. Sınırları ise $(-\pi,\pi)$ arasındadır.

3. w_1 dönen vektörün açısal hızıdır. Çizgisel hız cinsinden karşılığı $w_1 = 2\pi f$ dir. Birimi devir/veri aralığıdır. Saat dönme yönünün tersi (+) yön olarak varsayılır.

Aynı dönen vektörün frekans ortamında da belirlenmesi gerekir. Şekil 1.2 veya (1.2) bağıntısına dikkat edilirse dönen vektör yalnızca w_1 (veya f_1) frekansı için tanımlanmıştır. Bu nedenle bir dönen vektör (fazör) frekans ortamında ancak iki ayrı grafik ile gösterilir. Eğer f(t) izi çeşitli sinüzoidallerin toplamından oluşuyorsa, kuşkusuz ki frekans ortamında her sinüzoidalin bileşeni ayrı ayrı görülecektir. Örneğin, bir izin denklemi

$$f(t)=4\cos[2\pi.25.t-(\pi/3)]+ +6+2\sin(2\pi.50.t)-3\cos(2\pi.60.t) \qquad (1.3)$$

olarak verilsin. Bu iz farklı açısal hızlarda dönen vektörlerin toplamı olarak düşünülür. O zaman,

$$\begin{aligned} f(t)=\ & \mathrm{Ger}\{4\exp\{[2\pi.25.t-(\pi/3)]\}\}+\mathrm{Ger}\{6\exp[j(2\pi.0.t+0)]\} \\ & \mathrm{Ger}\{2\exp\{[2\pi.50.t-(\pi/2)]\}\}+\mathrm{Ger}\{3\exp[j(2\pi.60.t-\pi)]\} \end{aligned} \qquad (1.4)$$

olarak yazılabilir.

Not: Trigonometrik bağıntılardan,

$\sin(\alpha)=\cos[(\pi/2)-\alpha]$

dır. O zaman 3. terim

$\sin(2\pi.50.t)=\cos[(\pi/2-2\pi.50.t)]=\cos[(-2\pi.50.t)+\pi/2]$

$\cos\{-[(-2\pi.50.t)-(\pi/2)]\}=\cos(\beta)=2\sin(2\pi.50.t)$

$=2\cos[(-2\pi.50.t)-(\pi/2)]=\mathrm{Ger}\{2\exp\{j[(-2\pi.50.t)-(\pi/2)]\}\}$

şeklinde yazılabilir.

$-\cos(\alpha)=\cos(\pi-\alpha)$

$\cos(\pi-\alpha)=\cos(-\alpha+\pi)$

$\cos(-\alpha)=\cos(\alpha)$

$\cos[-(\alpha-\pi)]=\cos(\alpha-\pi)$

olduğundan benzer şekilde son terim de

$-3\cos(2\pi.60.t)=3\cos(2\pi.60.t-\pi)=\mathrm{Ger}\{3\exp[j(2\pi.60.t-\pi)]\}$

olarak elde edilir.

(1.4) bağıntısında dikkat edilmesi gereken nokta; (-) genliklerin π radyanlık bir evre farklılığına karşı geldiğidir (son terimdeki $-3\cos(2\pi.60.t)$ gerçel bileşen cinsinden $Ger\{3\exp[j(2\pi.60.t-\pi)]\}$ şeklinde yazılabilir).

Aynı yaklaşım matematiksel olarak

$$-A\cos(\alpha) = A\cos(\alpha \pm \pi)$$

dir. Yani evrenin +π veya -π olması sonucu etkilemez. Ancak burada, evreler için $-\pi \leq \phi < \pi$ tanımı yapıldığından (-) genliklerde evre farkı -π olarak seçilmelidir.

(1.4) bağıntısının dönen vektör diyagramı ve çizgisel spektrumu Şekil 1.3 te verilmektedir.

Buraya dek tek yönlü çizgisel spektrum anlatılmıştır. Ancak sinyal analizinde (iz çözümlemesi) çoğunlukla "çift yönlü çizgisel spektrum" kullanılır. Çift yönlü çizgisel spektrumun tek yönlüye oranla belirgin üstünlükleri vardır.

Daha önce çözülen örneği bu kez de çift yönlü spektruma uygun olarak çözelim.

$$f(t) = A\cos(w_1 t + \phi)$$

Not: Euler bağıntılarından $\cos(\alpha) = 1/2[\exp(j\alpha) + \exp(-j\alpha)]$

$$f(t) = A/2\{\exp[j(w_1 t + \phi)] + \exp[-j(w_1 t + \phi)]\}$$
$$f(t) = A/2\{\exp[j(w_1 t + \phi)] + \exp[j(-w_1 t - \phi)]\}$$

şeklinde yazılabilir. (1.5) bağıntılarından yararlanarak, f(t) izi eşit genlikli (A/2), zıt evreli ($(\phi, -\phi)$) ve ters yönde (w_1,-w_1) dönen iki vektörün toplamının gerçel eksen üzerindeki izdüşümü olarak düşünülür. Böyle dönen vektörlere (Şekil 1.4) "eşlenik (konjuge)" fazörler denir (Bkz. Bölüm 4.1 ve 5.2).

Problem böyle düşünülünce "(-) frekans" kavramı ortaya çıkmaktadır. Burada; temel kural olarak saat ibresinin ters yönünde dönen vektörlerin tanımladığı frekanslar (+), saat ibresi yönünde dönen vektörlerin tanımladığı frekanslar ise (-) olarak belirlenir.

Şekil 1.4 teki diyagramdan yararlanarak elde edilen çift yönlü çizgisel spektrum Şekil 1.5 te verilmektedir. Şekilden de görüldüğü gibi iki yönlü çizgisel spektrumun en önemli özelliği bakışımlı lmasıdır. Genlik spektrumu çift, evre spektrumu ise tek bakışıma sahiptir (Bkz. Bölüm 11.4).

Benzer yaklaşımlar kullanılarak (1.5) bağıntısı ile verilen izin çift yönlü çizgisel spektrumu bulunabilir (Şekil 1.6). Bunun için her terim önce üstel şekilde yazılarak her dönen vektörün dönme hızı, genliği ve evresi belirlenerek uygun bir şekilde çizilir.

İki yönlü çizgisel spektrumun, tek yönlü (+) çizgisel spektrumdan önemli bir farkı vardır. Tek yönlü (+) frekans spektrumunda, bir "f" frekansındaki genlik ve evre çizgisel çifti Ger[exp(jwt)] dönüşümü ile kosinüs işlevine dönmektedir. Ancak iki yönlü çizgisel spektrumda tek bir çizgi çiftinin hiç bir anlamı yoktur. Kosinüs işlevini elde etmek için, bunlardan başka eşlenik terimlere de gerek vardır. Bu nedenle iki yönlü frekans spektrumunda (f1,f2) gibi bir frekans aralığından söz ederken, bunun içine ($-f_1$,$-f_2$) olan (-) frekans aralığını da katmamız gerekir. Matematiksel olarak $f_1<f<f_2$ olmalıdır (buraya dek verilen şekilleri karşılaştırarak tek yönlü $+f_1$ spektrumunda görülen binin iki yönlü frekans spektrumunda hem $+f_1$ de hem de $-f_1$ de görüldüğüne dikkat ediniz).

Bu bölümde verilenler kısaca özetlenebilir. Basit sinüzoidallerin toplamından oluşan ve analitik bağıntısı belli olan dönemli bir izin çözümlenmesi bu bölümde verildiği gibi basit yöntemler yardımıyla yapılabilir. Ancak elde edilen dönemli sinyalin bağıntısı belli değilse Fourier serileri kullanılarak spektrum analizi elde edilebilir. Böylece f(t) izini oluşturan harmonik bileşenler bulunur. Bu konuya ilişkin iki örnek aşağıda sunulmaktadır.

Örnek 1.1
Şekil 1.7a da 500 sn uzunluğunda karışık bir iz verilmiştir. Zaman ortamında çok karışık olan bu iz, spektrum ortamında frekans bileşenleri cinsinden daha yalın olarak gösterilebilir. Bu gösterim için kullanılacak matematiksel yol Fourier dönüşümleridir. Fourier dönüşümleri kullanılarak, iz daha basit frekans bileşenlerine ayrılır. Şekil 1.7a da görülen sinyal, Fourier dönüşümü kullanılarak daha basit bileşenlerine ayrılırsa Şekil 1.7b de görülen on farklı frekansta, dolayısıyla on farklı döneme sahip, izler elde edilir. Başka bir deyişle, "a" da verilen f(t) izi on adet basit sinüzoidale ayrılmış olur. Kuşkusuz ki bunlardan en alçak frekanslı (en uzun dönemli) değişimin üzerine daha yüksek frekanslı değişimler bindirilmiştir yani modüle edilmiştir. Evre sorunu göz önüne alınmadan f(t) izinin denklemi

$$f(t) = \sin(2\pi.1.t) + \sin(2\pi.5.t) + \sin(2\pi.10.t) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \sin(2\pi.100.t)$$

olarak yazılabilir.

Örnek 1.2
Şekil 1.8a da verilen dönemsel izin spektrum analizi yapılmak istenmektedir. Eğer izin analitik denklemi belli ise spektrum analizi fazörler ile yapılır. Denklem belli değilse iz sürekli ve dönemli olduğu için Fourier serileri yöntemi kullanılır. Eğer izin dönemi belli değilse Fourier dönüşümleri yöntemi kullanılır.

Şekil 1.8a da "T_a" ile dönemli verilen iz, Şekil 1.8b de verilen değişik frekanslı altı adet sinüzoidalin toplamından oluşmaktadır. Bu izlerin frekansları şekillerin üzerinde belirtilmiştir. Fourier serileri kullanılarak yapılan analizde Şekil 1.8c de verilen evre ve genlik değerleri elde edilmiştir. "a" daki iz T_a=24 sn ile dönemseldir. Diğer izlerin dönemleri de bu temel dönemin tam katları şeklindedir. Dolayısı ile temel frekans f_a=1/24 devir/sn dir. Başka bir deyişle "a" daki iz frekansları f=1/24 devir/sn den f=1/4 devir/sn ye kadar olan 6 adet izin toplamından oluşmuştur. Bu altı izin frekans ortamındaki genlik ve evre konumları Şekil 1.8c de verilmektedir. Bu aşamadan sonra istenirse, bu altı iz altı adet sinüzoidalin toplamından oluşan bir analitik denklem ile ifade edilebilir.